ÁREA
MATEMÁTICA
SERIE I. CICLO ORIENTADO
NIVEL SECUNDARIO
CORRIENTES 2023

ALGEBRA Y FUNCIONES

CORRIENTES
somos todos!

Ministerio de Educación

2022 LAS MALVINAS SON ARGENTINAS

Dirección de Planeamiento e Investigación Educativa

Dirección General de Nivel Secundario

AUTORIDADES PROVINCIALES

DR. GUSTAVO VALDÉS
GOBERNADOR DE CORRIENTES

LIC. PRÁXEDES YTATÍ LÓPEZ
MINISTRA DE EDUCACIÓN

DR. JULIO CÉSAR DE LA CRUZ NAVÍAS
SUBSECRETARIO DE GESTIÓN EDUCATIVA

DRA. PABLA MUZZACHIODI
SECRETARIA GENERAL

PROF. SERGIO JOSÉ GUTIERREZ
DIRECTOR GENERAL DE NIVEL SECUNDARIO

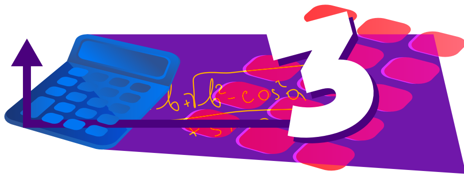
LIC. JULIO FERNANDO SIMONIT
DIRECTOR DE PLANEAMIENTO
E INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

COMISIÓN REDACTORA

PROF. **EDITH NOEMÍ GOROSTEGUI**
PROF. **DIEGO FRANCISCO VILOTTA**
PROF. **MARÍA ITATÍ GÓMEZ**

DISEÑO & ARMADO:

REINA a CABALLO



INTRODUCCIÓN

Al igual que en el Diseño curricular para el Ciclo Básico, en este Ciclo Orientado se propone también el eje Álgebra y Funciones con el objetivo de profundizar el modelo lineal y avanzar hacia el estudio de nuevas funciones que describen modelos no lineales, a través de la modelización de situaciones extra e intra matemáticas.

Así, en 4to año, el estudio se focaliza alrededor de las funciones lineales y cuadráticas y en 5to y 6to sobre otras funciones tales como las polinómicas, racionales, exponenciales, trigonométricas, valor absoluto, etc.

En este documento se abordan los siguientes contenidos del Diseño Curricular:

*La **modelización** de situaciones extramatemáticas e intramatemáticas mediante **funciones lineales y cuadráticas**, lo que supone*:

- *Usar las nociones de dependencia y variabilidad.*
- *Seleccionar la representación (tablas, fórmulas, gráficos cartesianos realizados con recursos tecnológicos) adecuada a la situación.*
- *Interpretar el dominio, el codominio, las variables, los parámetros, y cuando sea posible, los puntos de intersección con los ejes.*
- *Determinar máximos o mínimos en la modelización de las situaciones.*
- *Apelar a las propiedades de las operaciones de números reales (factor común, cuadrado de un binomio, diferencia de cuadrados) y a gráficos cartesianos realizados con recursos tecnológicos, para resolución de ecuaciones e interpretación de las soluciones en el contexto de la situación.*
- *El análisis de la ecuación cuadrática, vinculando la naturaleza de sus soluciones con la gráfica de la función correspondiente.*

*El **análisis del comportamiento** de las funciones lineales y cuadráticas, supone:*

- *Interpretar la información que brindan sus gráficos cartesianos y sus fórmulas.*
- *Vincular las variaciones de sus gráficos con las de sus fórmulas y establecer la incidencia de las mismas en las características de las funciones, apelando a recursos tecnológicos para construir los gráficos.*

*El **análisis de diferentes fórmulas** de las funciones cuadráticas, que pueden surgir en un contexto y cuyas transformaciones mediante las propiedades de las operaciones de números reales, (factor común, cuadrado de un binomio, diferencia de cuadrados) resultan equivalentes.*

Este documento presenta un estudio matemático de las funciones cuadráticas, a través del análisis de tres problemas que, por sus características, permiten abarcar y desarrollar en forma progresiva las distintas propiedades.

En primer término, se describen las características del modelo cuadrático en contraposición o ruptura del modelo lineal, pero, en este caso, a diferencia de lo planteado para el Ciclo Básico, se consideran contextos continuos intra y extra matemáticos, lo que permite profundizar y ampliar los conocimientos de ambos modelos.

El **primer problema** propuesto para su estudio, se plantea en un contexto geométrico - intra matemático - y corresponde a la variación del área de rectángulos de igual perímetro, en función de la variación de uno de sus lados. El **segundo** es un problema de "tiro vertical" -extra-matemático- del campo de la Física, en el que se estudia la variación de la altura de un objeto lanzado hacia arriba, en función del tiempo, desde que se inicia el movimiento del objeto hasta que cae a la superficie. Por **último**, se presenta un problema meteorológico -contexto extra matemático - donde se considera la variación de la temperatura en función de la variación del tiempo.

ESTUDIO DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN RUPTURA CON EL MODELO LINEAL

Se podrán abordar propuestas que traten los dos modelos, el lineal y el cuadrático, de manera independiente. En el presente documento se consideraron los conocimientos de ambos modelos, donde es importante abordarlos articuladamente y no como mera yuxtaposición de los mismos, para que cobren significados.

El modelo cuadrático tiene varias características que se contraponen con el modelo lineal y, además, existen otras, propias de ese modelo que, utilizadas convenientemente permiten realizar importantes anticipaciones sobre su comportamiento y, en el nivel secundario su estudio deberá ir en ese sentido.

Características del **modelo lineal**, necesarias para contraponer a las del modelo cuadrático a desarrollar:

- La variación de la función es **uniforme**. Es decir que, a un mismo incremento de la variable independiente, le corresponde un mismo incremento de la variable dependiente.
- La representación gráfica de la función es una **recta**.
- En todo su dominio es creciente o, por el contrario, en todo su dominio es decreciente.
- Es inyectiva. Cada valor de la imagen tiene un único valor como preimagen.
- Es sobreyectiva. Todos los valores del conjunto de llegada tienen su preimagen.
- La fórmula (registro algebraico) en su forma explícita o polinómica (**y=ax+b**) es suficiente para desarrollar las cuestiones más importantes del modelo, sin necesidad de tratar con otras como la implícita, polar, paramétrica, cartesiana, etc.

Como el modelo lineal es el único que se ha estudiado de manera sistemática en el ciclo básico[1] y además encaja en un conjunto importante de situaciones, es razonable que los estudiantes quieran aplicar sus propiedades a otros no lineales.

En este sentido, al inicio del estudio de las funciones cuadráticas deben plantearse problemas en contextos extra-matemáticos que se correspon-

[1]Tener en cuenta que la función de proporcionalidad directa es un caso particular de la función lineal, aunque en las propuestas de enseñanza habituales se la estudia de manera independiente.

dan con un modelo cuadrático, con el objetivo de identificar sus características en contraposición al lineal.

En libros de texto y materiales de desarrollo curricular se presentan propuestas en **contextos discretos** que permiten iniciar el estudio de la relación entre lo lineal y lo cuadrático.

En este documento, se retoma y profundiza ese estudio a partir del trabajo con **contextos continuos**, tal como se verán a continuación.

PRIMER PROBLEMA: la variación del área en rectángulos de igual perímetro

Un contexto continuo, que permite el estudio de algunas características del modelo cuadrático, puede plantearse a partir del análisis de una situación, que involucra la variación del área de rectángulos de igual perímetro, en función de uno de sus lados, como la siguiente:

Situación: Si se construyen rectángulos distintos se puede pensar que sus perímetros van a ser distintos, sin embargo, se pueden construir rectángulos distintos que tengan el mismo perímetro.

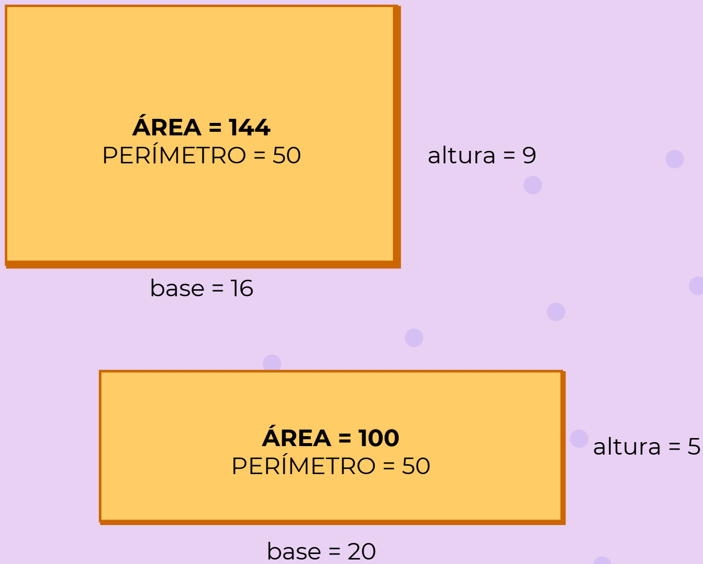
Por ejemplo: un rectángulo R1 de base $b = 5$ cm y altura $a = 20$ cm y otro rectángulo R2: $b = 7$ cm y $a = 18$ cm tienen perímetro igual a 50 cm, sin embargo sus áreas son distintas:

área R1 = 5 cm • 20 cm = 100 cm² y área R2 = 7 cm • 18 cm = 126 cm²

Dependiendo de los puntos de partida de los alumnos, será necesario dedicar un tiempo de trabajo a la cuestión de la existencia de distintos rectángulos con igual perímetro previamente, o como parte de la discusión del problema sobre la variación del área. Es importante realizar esta aclaración porque ésta, como otras cuestiones que se desarrollarán, necesita un trabajo con los alumnos que signifique un proceso progresivo y colectivo de construcción. Para poder organizar y gestionar este proceso el docente debe reflexionar previamente sobre determinadas cuestiones matemáticas que probablemente se aparten un poco de la matemática “recibida” en la formación docente.

Más aún, se podría incluso calcular y sistematizar la información volcando en una tabla la base y área de distintos rectángulos de igual perímetro - 50 cm en este caso - con el objetivo de visualizar y, de esta manera, inferir algunas propiedades del modelo cuadrático tal como se ve a continuación.

base del rectángulo (cm)	**área** del rectángulo (cm²)
5	100
6	114
7	126
8	136
10	150
11	154
12	156
13	156
14	154
15	150
17	136
18	126
19	114
20	100
21	84

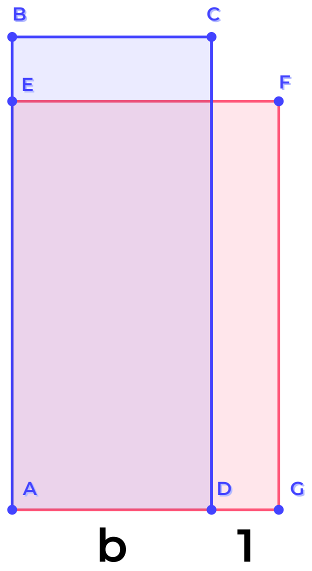


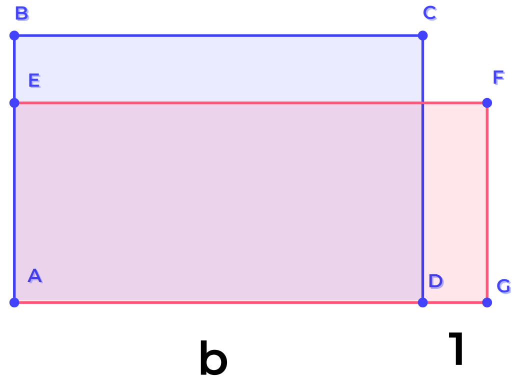
CRECIMIENTO EN UN TRAMO Y DECRECIMIENTO EN OTRO

Observando la tabla se puede ver que en un primer tramo la función es creciente, es decir que cuando aumenta la variable independiente, también lo hace la variable dependiente, y que en un segundo tramo la función es decreciente. Esta es una característica distinta a la de las funciones lineales, dado que son crecientes - o decrecientes - en todo el dominio, pero no crecientes en un tramo y decreciente en otro.

Si bien observando la tabla se puede verificar el crecimiento en el primer tramo y el decrecimiento en el segundo, es interesante preguntarse a qué se debe este comportamiento. Incluso se podría pensar que, al **aumentar** la base y, necesariamente, **disminuir** la altura, los valores se compensan, es decir que se mantenga igual el área como lo hace el perímetro, pero claramente, por los cálculos realizados, esto no es así. Por otro lado, si esto fuera cierto se estaría afirmando que al mantenerse constante el área, la relación entre la base y la altura serían magnitudes inversamente proporcionales, es decir que el producto entre estas sería constante.

En el lado izquierdo de la siguiente ilustración -registro geométrico- se puede apreciar que, cuando la base es menor que la altura, (b<a), al modificar el rectángulo aumentando la base - por ejemplo, que pase de valer "b" a valer "b+1"- y disminuyendo la altura - de "a" a "a-1" -, es más lo que se agrega de área que lo que se quita. Lo anteriormente descripto hace que, mientras la base sea menor que la altura, la función sea creciente.





De manera similar, en el lado derecho de la ilustración se puede apreciar que, cuando la base es mayor que la altura, (b>a), al modificar el rectángulo aumentando la base y disminuyendo la altura, es menos lo que se agrega que lo que se quita de área. Esto hace que, si la base es mayor que la altura, la función sea decreciente. En definitiva, apoyados en el registro geométrico se explica por qué al principio la función es creciente y luego, cuando la base es mayor que la altura, la función es decreciente.

La variación ya no es uniforme

Un análisis desde el punto de vista aritmético

A diferencia del modelo lineal, donde a igual variación de la variable independiente le corresponde igual variación de la variable dependiente, en esta situación no sucede lo mismo. Para esta cuestión se puede revisar alguna parte de la tabla con el fin de constatar cómo se modifica la variable dependiente (el área) cada vez que la variable independiente (la base) aumenta una unidad:

base del rectángulo (cm)	**área** del rectángulo (cm^2)
5	100
6 = 5 **+ 1**	114 = 100 **+ 14**
7= 6 **+ 1**	126 = 114 **+ 12**
8 = 7 **+ 1**	136 = 126 **+ 10**

En los valores elegidos, cada vez que se suma una unidad a la base, al área se le van sumando valores distintos (14, 12, 10, ...), es decir que la variación del área no es constante cuando la base aumenta la misma cantidad.

Un análisis desde el punto de vista algebraico

Algebraicamente se puede explicar del siguiente modo: A = $b \cdot a$. Además, se sabe que: $b + a = 25$ por ser el perímetro igual a 50 y que en la fórmula del área la altura en función de la variable se puede escribir como (25-b), resulta:

$$A = b \cdot (25 - b)$$

Si se quiere analizar cuánto varía el área al modificarse la base en una unidad se puede restar al valor del área cuando la base es b+1 el valor del área cuando la base es b:

$$A(b+1) - A(b) = (b + 1) \cdot (25 - b - 1) - b \cdot (25 - b) = \ldots\ldots = 24 - 2b$$

Esto se verifica calculando, por ejemplo:

$$A(6) - A(5) = 114 - 100 = 14 = 24 - 2 \cdot 5$$

Se puede concluir que, a diferencia de un modelo lineal donde, a variaciones constantes de la variable independiente le corresponde variaciones constantes de la variable dependiente, en este modelo, a variaciones constantes de la variable independiente (por ejemplo, variar en 1 la medida de la base), le corresponde una variación de la variable dependiente que no es constante (el área varía 24-2b cuando la base varía 1).

La no inyectividad del modelo cuadrático

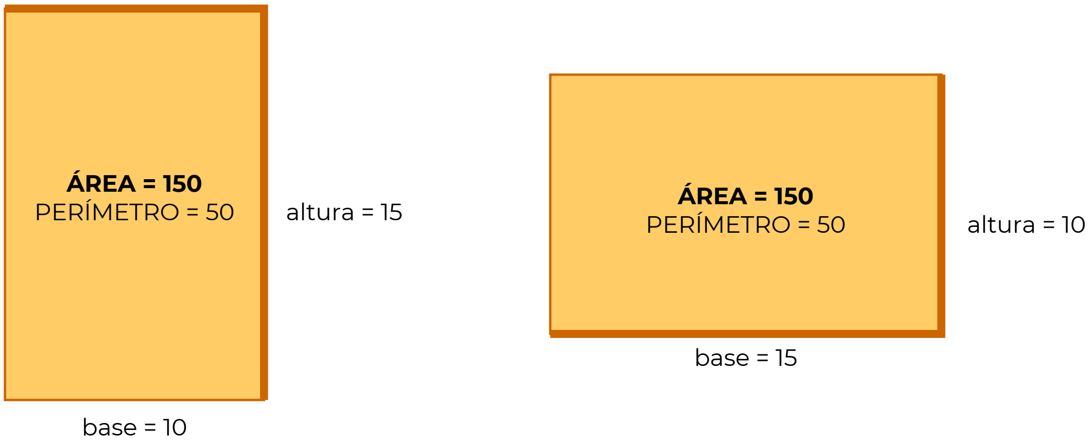
Otra diferencia importante con el modelo lineal es que, el modelo cuadrático no es inyectivo, es decir que se puede obtener un mismo valor de la variable dependiente a partir de distintos valores de la variable independiente.

En el ejemplo propuesto aquí, se podría analizar esta característica distintiva del modelo cuadrático, respecto del lineal a partir de la pregunta:

¿Habrá algún rectángulo de este tipo que tenga la misma área que el de base 10?

Si se tiene en cuenta **el contexto** y su registro geométrico, se puede pensar que un rectángulo de base 10 y altura 15 es congruente con un rectángulo de base 15 y altura 10. Los dos rectángulos **tienen distinta base**, tienen igual perímetro (50 cm, como todos los rectángulos que estamos considerando) e **igual área: 150 cm²**. Es decir que se tienen dos rectángulos "distintos" que les corresponde el mismo valor del área.

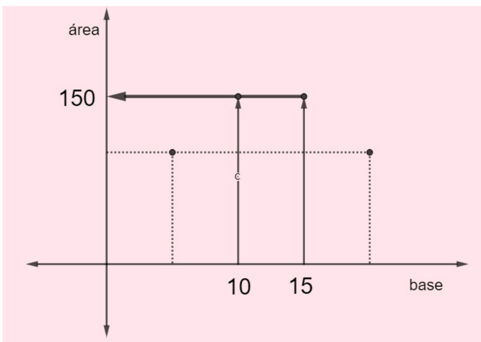
Desde el punto de vista funcional se trata con dos conjuntos que se relacionan. En este caso, el conjunto de valores posibles de un lado del rectángulo que llamamos base (variable independiente) y el conjunto de valores posibles del área del rectángulo (variable dependiente). En este sentido, se trata de dos rectángulos diferentes a pesar de la congruencia en el marco geométrico.



En el registro “tabla” se puede ver la no inyectividad, teniendo en cuenta cómo a dos valores distintos de la primera columna, le corresponde un mismo valor en la segunda columna.

base del rectángulo (cm)	**área** del rectángulo (cm^2)
10	150
15	150

Incorporando el registro gráfico al análisis, si se representan estos puntos en un gráfico cartesiano, donde la base se representa en el eje horizontal y el área correspondiente de los rectángulos en el eje vertical, se puede observar que a distintos valores en el eje horizontal le corresponde un mismo valor en el eje vertical:



Teniendo en cuenta lo anterior se puede plantear si es posible determinar una forma de encontrar dos valores distintos de la base y cuyas áreas sean iguales.

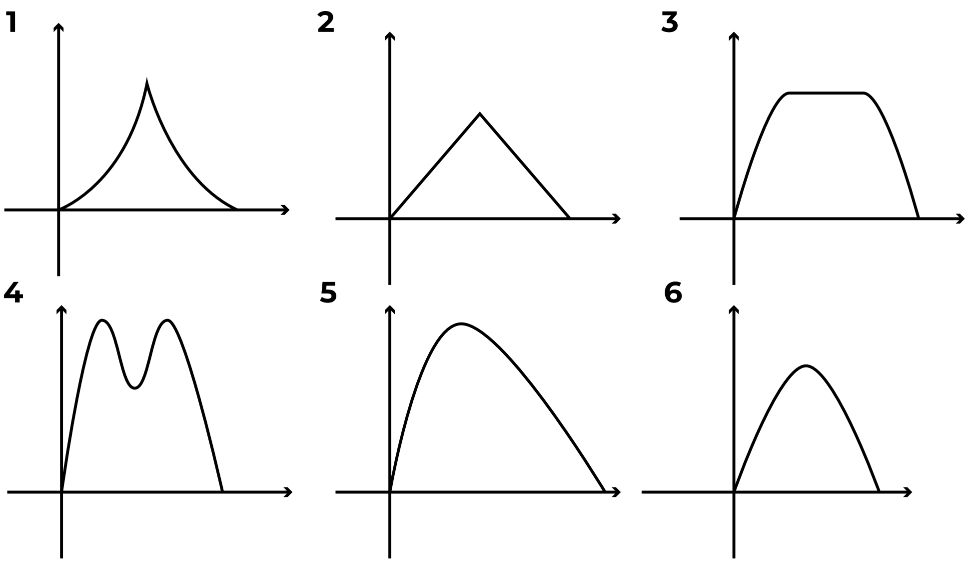
En el ejemplo de rectángulos de perímetro igual a 50, la forma de determinarlos sería la siguiente: **eligiendo un rectángulo con una medida cualquiera de la base, es posible encontrar un rectángulo de igual área considerando otro que tenga como base la medida de la altura del rectángulo elegido inicialmente.**

LA GRÁFICA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Teniendo como información el contexto de la situación y los datos organizados en la tabla presentada, se analizan las diferencias con el modelo lineal. Por ejemplo, que distintos valores de la variable pueden tener una misma imagen; que se puede modelizar algebraicamente (fórmula para calcular el área en función de la base) lo que permite calcular el área a partir de cualquier valor de la base; que en un tramo crece y en otro decrece, pero aún faltan analizar otras características propias del modelo cuadrático y, para esto, el estudio de su gráfica puede aportar.

En varios libros de textos se encuentran actividades que consisten en decidir, entre distintos "posibles gráficos", cuál o cuáles pueden representar la variación de la variable dependiente - del área de los rectángulos en nuestro caso - en función de la variable independiente (base). Luego de presentar la actividad, se atenderán las cuestiones matemáticas que pueden ser tratadas a partir de la misma.

Actividad: *para cada uno de los siguientes gráficos, decidir si puede corresponder, o no, a la representación gráfica de la variación del área del rectángulo en función de la base del mismo (considerando que el perímetro es de 50 cm).*



En relación con el **diseño de las gráficas** se observa que no están definidos valores numéricos en los ejes cartesianos como así tampoco una escala. Con esta decisión se pretende que el estudiante apele a argumentos relativos al tipo de crecimiento - o decrecimiento - para seleccionar o desechar una determinada opción que se presenta como posible, más que seguir el orden muchas veces usual, de graficar una función a partir de una tabla de valores.

Lo interesante de estas gráficas es que responden a algunos rasgos del modelo analizado. Por ejemplo, todas las gráficas crecen en un tramo y decrecen en otro o, también, cumplen con la no inyectividad ya mencionada, con lo cual no es tarea fácil decidir cuál sería la gráfica que describe el comportamiento del área que se está

LA FUNCIÓN TOMA UN VALOR MÁXIMO

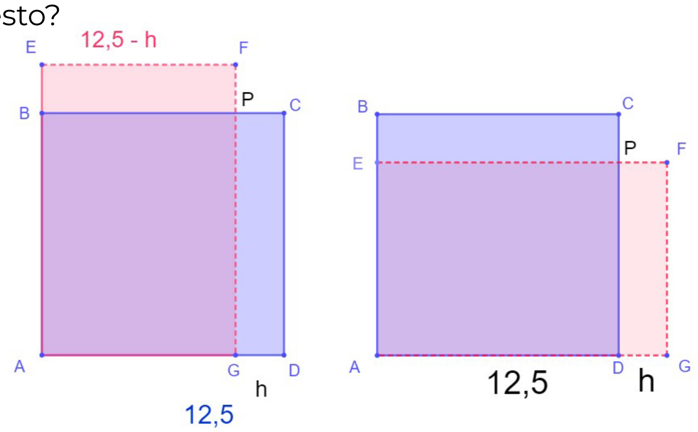
Para seleccionar la gráfica correspondiente se podría poner en relación con la tabla de valores presentada más arriba y, por ejemplo, considerar el hecho de que hay dos valores de la variable independiente, que asumen el mismo valor de la variable dependiente: la imagen del 12 y del 13 es 156. Ante estos datos se podría pensar que el ***gráfico 3*** describe la situación porque presenta una "meseta" -tramo lineal- donde se mantiene constante la función y, como en las funciones es frecuente trabajar con valores enteros para luego unir los puntos, es razonable considerar esta posibilidad. Esto significa que para valores de la base intermedios del 12 y 13 se debería tomar el mismo valor del área (156), sin embargo, esta situación no tiene cabida aquí. Por ejemplo, si se asigna el valor 12,5 se obtiene un área de 156,25, mayor que el correspondiente a 12 y 13. Es decir que no se puede afirmar que la función se mantenga constante en todo este tramo.

Ahora bien, **¿existirá un tramo, más corto quizás, donde la función sea constante?**

Es una pregunta interesante, y aunque a esta altura se esté convencido de que el valor máximo, que puede tomar el área se corresponderá con el valor de la base en 12,5 - este convencimiento, puede provenir de una exploración numérica incluso - puede ser un momento oportuno para discutir que, en matemática, para poder asegurar algo de manera irrefutable **se debe demostrar**. Si se demuestra que en 12,5 la función toma el mayor valor posible, se podría afirmar que la gráfica no tiene una meseta alrededor del 12,5 y, por lo tanto, el gráfico 3 no correspondería a la variación del área en función de la base. Geométricamente, esto es equivalente a afirmar que, si el lado del rectángulo mide 12,5 - un cuadrado en este caso - su área es máxima, tal como se verá en el apartado siguiente.

EL CUADRADO ES EL RECTÁNGULO DE ÁREA MÁXIMA

Recurriendo al marco geométrico se observa que los rectángulos no cuadrados - tanto los de base menor que la altura, como los de base mayor - tienen menor superficie que el cuadrado de 12,5 de lado. Esto se debe a que, en ambas figuras, los rectángulos BEFP y DPFG -resaltados de color rosa - tienen menos superficie que los rectángulos GPCD y EBCP -resaltados de color celeste- ¿Por qué sucede esto?



En las condiciones del problema que se está estudiando, se puede expresar el lado de los rectángulos de base menor a 12,5 como (12,5 - h) y, los de base mayor a 12,5 como (12,5 +h) y afirmar lo siguiente:

$$A(12{,}5 - h) < A(12{,}5) \quad \text{y} \quad A(12{,}5) > A(12{,}5 + h)$$

Como la fórmula para calcular el área es $A(x) = x \cdot (25 - x)$, resulta:

$$A(12{,}5 - h) = (12{,}5 - h) \cdot (25 - (12{,}5 - h)) =$$

$$= (12{,}5 - h) \cdot (12{,}5 + h) = 12{,}5^2 - h^2 < 12{,}5^2$$

(esta última desigualdad se da por estar restando un número positivo en el miembro de la izquierda) y como $A(12{,}5) = 12{,}5^2$ queda demostrado que: $A(12{,}5 - h) < A(12{,}5)$.

De manera similar se demuestra que $A(12{,}5) > A(12{,}5 + h)$

Desde el punto funcional la función área $A(x) = x \cdot (25 - x)$ tiene un máximo en $x = 12{,}5$.

El análisis realizado permite **descartar el gráfico 4**, dado que se mostró que el único máximo se obtiene cuando la variable independiente toma el valor 12,5. En los otros valores la función es creciente o decreciente.

LA GRÁFICA ES SIMÉTRICA RESPECTO A LA RECTA VERTICAL QUE PASA POR EL MÁXIMO DE LA FUNCIÓN

En el apartado anterior se concluyó que el máximo se encuentra en 12,5 y es también el valor medio de varios pares, que tienen igual área (12 y 13, 10 y 15, ...). Por otro lado, 12,5 es el punto medio de 0 y 25 y corresponden a los valores donde se anula la función.

Este análisis permite **descartar el gráfico 5**. En este se ve que el máximo se encuentra a la izquierda del punto medio, donde la curva intersecta al eje de abscisas x (valores de la base de los rectángulos). Si en el gráfico 5 se traza una recta vertical que pasa por el valor máximo, es fácil observar que la gráfica no es simétrica con respecto a este eje.

Una función simétrica respecto a la recta y=12,5 debe cumplir que A (12,5-h) =A (12,5+h). Considerando h=0,5 se cumple: A (12) =A (13) =156. Para h=2,5 también se cumple: A (10) =A (15) =15. Con estos valores se puede descartar que sea el gráfico 5 el que representa la variación del área en función de la base de los rectángulos.

Que la función tenga puntos simétricos con respecto al eje vertical que contiene al máximo no garantiza la simetría de la función. Para afirmar que la función es simétrica es necesario demostrar la siguiente igualdad:

$$A(12{,}5 - h) = A(12{,}5 + h)$$

Ahora bien, la igualdad anterior es equivalente a la siguiente:

$$(12{,}5 - h) \cdot (25 - (12{,}5 - h)) = (12{,}5 + h) \cdot (25 - (12{,}5 + h))$$

$$(12{,}5 - h) \cdot (12{,}5 + h) = (12{,}5 + h) \cdot (12{,}5 - h)$$

que se cumple para cualquier valor de h, por tener en ambos miembros los mismos factores.

Esta simetría de la gráfica respecto al eje y = 12,5 (12,5 es el valor de x donde la función toma el valor máximo) es una propiedad importante que sirve, entre otras cosas, para encontrar valores de la función que tienen la misma imagen.

Una tarea asociada a esta propiedad podría ser la siguiente: *encontrar, si es que existe, otro valor de la variable independiente que tenga la misma imagen que x = 6.*

Como x = 6 está a 6,5 unidades a la izquierda del 12,5 y la gráfica es simétrica, el otro valor que tendrá la misma imagen es x = 12,5 + 6,5 = 19. Finalmente, A (6) = A (19) = 114

Para responder la pregunta anterior, fue necesario conocer el valor donde la función alcanza su máximo. Por otro lado, para encontrar el valor máximo, es necesario tener dos valores que tengan la misma imagen, siendo el punto medio el valor donde la función toma el valor máximo.

Se ha demostrado que la función tiene un máximo de manera geométrica, pero ***aún no se ha demostrado de manera analítica*** *esta propiedad. Esto se hará más adelante utilizando otras formas de la fórmula.*

RAPIDEZ DE CRECIMIENTO. LA PARÁBOLA

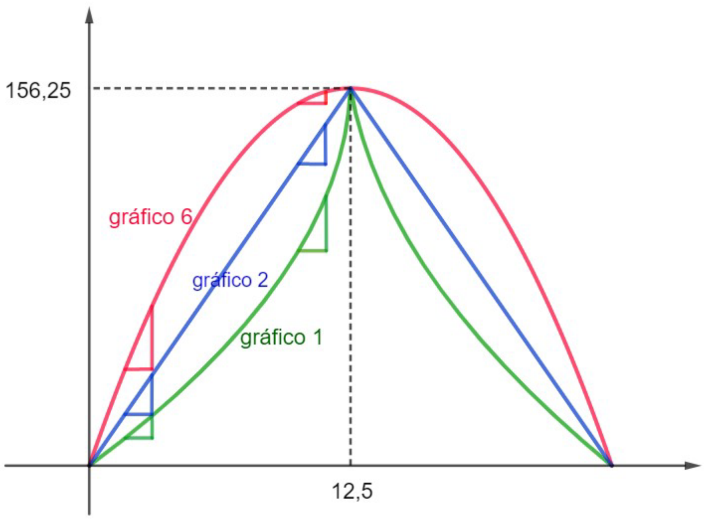
Quedan por analizar las gráficas 1, 2 y 6. Las tres gráficas tienen un máximo en el punto medio de los dos valores, donde intersecta el eje x. Para determinar cuál es la gráfica, hay que analizar con más detalle la **rapidez de crecimiento** y decrecimiento de la función.

En el gráfico dado a continuación están superpuestas las tres gráficas mencionadas a los efectos de compararlas.

Como en la función Área que se está considerando, el crecimiento **no es constante**, el gráfico 2 no puede ser el que describe la situación.

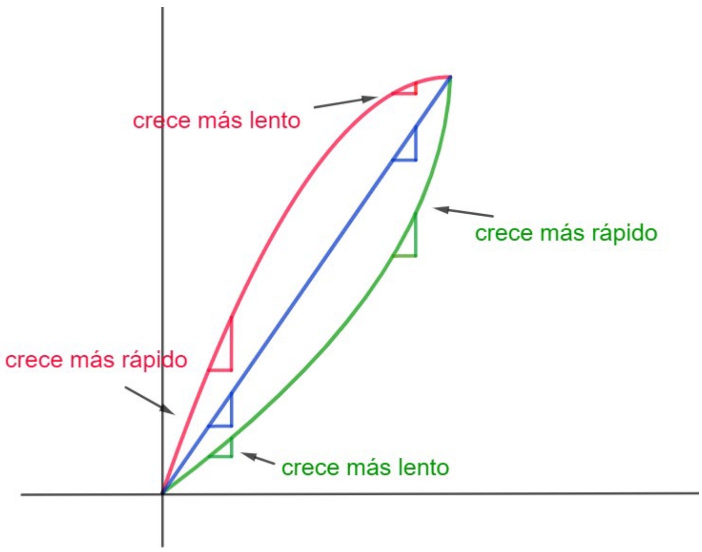
Queda analizar el crecimiento - y decrecimiento - del gráfico 1 y del 6.

Nótese que **“al principio”** el gráfico 1 - curva verde - **crece lento** y luego, más cerca del máximo, la función crece más rápido. En cambio, en el **gráfico 6** sucede lo contrario, **al principio crece rápido** pero cerca del máximo crece más lento.



Graficando sólo el tramo donde las funciones crecen es interesante preguntarse:

¿Cuál de las dos gráficas representa la variación del área en función de la base del rectángulo?:



Una posibilidad es analizar la rapidez de crecimiento en la tabla, en valores de la variable que se encuentran al "principio" y en valores que se encuentran cerca del máximo.

base del rectángulo (cm)	**área** del rectángulo (cm^2)
5	100
6	100+**14**=114 (crece más rápido al "principio", lejos del vértice)
7	126
....	....
10	150
11	150+**4**=154 (crece más lento cerca del máximo)
12	156

Cuando la base pasa de 5 a 6, el área del rectángulo pasa de 100 a 114, es decir que varió en 14 unidades. En cambio, cuando la base pasa de 10 a 11, el área del rectángulo pasa de 150 a 154, es decir que varió tan solo 4 unidades. Podemos concluir que al principio crece más rápido y, cerca del vértice, crece más lento.

Finalmente, de los gráficos propuestos, el que se ajusta a la situación planteada es el **gráfico 6**. Este gráfico recibe el nombre de parábola.

Con el análisis de otros ejemplos se puede concluir que en este tipo de funciones, las cuadráticas, siempre tendrán por gráfica una parábola.

DISTINTAS FORMAS DE LA FÓRMULA Y SU RELACIÓN CON LA GRÁFICA

Una vez familiarizados con las características descriptas del modelo cuadrático, es posible realizar un análisis que relacione las distintas formas, que puede tomar su fórmula con las propiedades y con las características de su gráfica, tales como la amplitud y la orientación que pueden tener las ramas de la parábola.

La forma polinómica de la función cuadrática es la más conocida y a la que más atención se destina en la enseñanza secundaria, pero es importante señalar, que si bien tiene su razón de ser, existen otras formas de la función que brindan información muy valiosa y que permiten la demostración de propiedades. Nos referimos a las formas factorizada y canónica y a las propiedades cuya demostración usando la forma polinómica no resultan viables de desarrollar en una primera etapa de la formación de los alumnos en este tema.

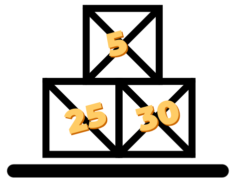
Es importante aprovechar el **trabajo algebraico transversal** que se puede hacer al analizar, convertir expresiones, justificar propiedades, plantear y resolver ecuaciones, etc. mientras se trabaja con las distintas formas de la función cuadrática. Se realiza esta aclaración porque, aunque parezca un poco extenso el trabajo propuesto sobre este tema, es posible abordar cuestiones de manipulación algebraica, que se suelen dar como técnicas puntuales sin un objetivo en sí mismo.

Además de conocerse las distintas formas, que puede tomar la fórmula de una función cuadrática, es importante reparar las ventajas que tiene cada una de ellas, dependiendo de la pregunta que se pretenda responder.

SEGUNDO PROBLEMA: tiro vertical

Se trata de un problema clásico de la Física, que se modeliza con una función cuadrática y por sus características, es interesante su estudio en el nivel secundario.

Desde cierta perspectiva se podría pensar que estudiar Física, consiste en memorizar fórmulas y luego aplicarlas, sin embargo, es posible transitar un proceso constructivo que se inicie por analizar el comportamiento del fenómeno, a partir de observar con conocimientos del sentido común, tal como se realiza en la ciencia, al inicio del estudio de un determinado fenómeno. Describirlo con mayor precisión de manera que permita anticipar situaciones análogas, también es objeto de la ciencia y para este fin, la matemática ocupa un lugar central.



Este problema de tiro vertical, es un ejemplo que atrapa las etapas del proceso constructivo descripto y que se toma aquí atendiendo a que el modelo cuadrático, es el que describe la variación de la altura a medida que transcurre el tiempo.

Situación

Una piedra se lanza verticalmente hacia arriba. Se sabe que la piedra alcanza una altura máxima de 20 metros y que, al cabo de 4 segundos, cae al piso.

CARACTERÍSTICAS DEL TIRO VERTICAL Y EL MODELO CUADRÁTICO

Una primera pregunta que se puede plantear, a partir de observar lo que sucede en la situación presentada, es la siguiente:

¿Se puede anticipar que la variación de la altura con respecto al tiempo responde a un modelo cuadrático?

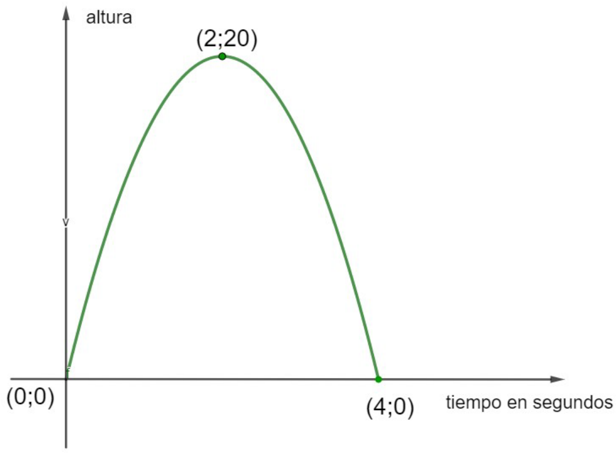
Si se lanza la piedra hacia arriba, para que caiga tendrá que cambiar de sentido, por lo tanto, llegará hasta cierta altura y empezará a descender después. Se podría pensar en describir esta situación a través de dos modelos lineales, uno para el ascenso y otro para cuando desciende la piedra. Esto significaría que, en tiempos iguales, la piedra avanza la misma distancia, en este caso cuando asciende y cuando desciende. Sin embargo, esto no sucede porque, si bien asciende cuando se lanza a incrementos iguales de tiempo, no sucede que la altura vaya aumentando en la misma proporción. Esta afirmación se fundamenta en el hecho de que la piedra a medida que asciende disminuye su velocidad, a medida que aumenta el tiempo. En otras palabras, **a incrementos iguales de tiempo no le corresponden incrementos iguales de altura, por lo tanto, al no ser constante la velocidad el modelo no es lineal.**

Por otro lado, se inicia el movimiento con una velocidad importante y luego avanza más lentamente, hasta que la velocidad se hace cero y luego se comporta en sentido contrario, es decir, decrece la altura y la velocidad va aumentando. Así también, el tiempo que tarda en alcanzar su altura máxima, es el mismo que tarda en caer desde la altura alcanzada, hasta la altura desde donde fue lanzado.

Estas observaciones y análisis realizados, respecto del comportamiento del fenómeno físico descripto, dan cabida a la hipótesis de que es factible modelizarlo con una función cuadrática.

LA GRÁFICA DEL TIRO VERTICAL

A partir de las conclusiones previas y con los datos del problema, se puede realizar el gráfico de la siguiente parábola, con el objetivo de describir la variación de la altura de la piedra en función del tiempo transcurrido.



Se puede deducir que los puntos (0;0) y (4;0) pertenecen a la gráfica al suponer que, en el momento inicial, la altura de la piedra es 0 y que, al cabo de 4 segundos la altura vuelve a ser cero.

Si bien el enunciado, no dice en qué instante la piedra alcanza la altura máxima, por una cuestión de simetría del modelo cuadrático, y/o teniendo en cuenta el contexto, se puede deducir que, la piedra alcanza su altura máxima de 20 metros a los 2 segundos de ser lanzada.

FORMA FACTORIZADA Y LA INTERSECCIÓN DE LA PARÁBOLA CON EL EJE X

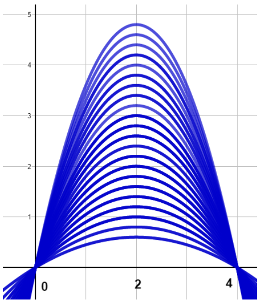
Consigna: *indicar cuál de estas fórmulas puede representar la situación planteada en el gráfico, donde x representa el tiempo en segundos y f(x) representa la altura de la piedra en cada momento.*

a) $f(x) = -5 \cdot x \cdot (x - 4)$ b) $f(x) = 5 \cdot x \cdot (x - 4)$ c) $f(x) = -5x^2 + 20$

La fórmula c) no puede ser porque, cuando x=0, la función toma el valor 20 y, si fuera la fórmula que representa la situación, debería tomar el valor 0.

Como en la fórmula b) se encuentran los factores x y (x-4), los puntos (0,0) y (4,0) verifican la ecuación. Sin embargo, no puede ser la fórmula porque, cuando x=2, f(x)= -20 en lugar de 20 como se espera.

La fórmula a) sí puede representar la situación, debido a que los tres puntos señalados verifican la ecuación.



Tarea 1: *Obtener la fórmula de un segundo tiro vertical, cuya gráfica sea una parábola que pase por (0;0) y (4;0) pero que, en lugar de tener un máximo en el punto (2;20) lo tenga en el (2;10) ¿Será posible un tiro vertical con estas características?*[2]

Solución: Como la parábola que se busca sigue intersectando al eje x en los puntos (0,0) y (4,0) los factores x y (x - 4) tienen que seguir en la fórmula para que la imagen del 0 y del 4 sigan siendo 0. Sin embargo, como f(2) = - 5 · 2 · (2 - 4) = 20, ya no sirve multiplicar por -5 porque se necesita que la máxima altura alcanzada sea 10 en lugar de 20. Se quiere una fórmula de la forma f*(x) = a · x · (x - 4) donde el valor del parámetro a ya no es -5. Como el objetivo es llegar a la mitad de altura que en el primer tiro vertical, y los factores x y (x -4) siguen valiendo lo mismo que en el primer tiro vertical, se puede deducir que el parámetro a se reduce a la mitad, es decir que ***a* = -5/2**.

Esta idea se puede generalizar diciendo: si se quiere obtener una parábola que pase por (0,0) y (4,0) y cuyo vértice sea (2,k), siendo k un valor cualquiera, se puede plantear la ecuación:
f*(2) = a · 2 · (2 - 4) = k , quedando *a* = k/(-4).

Observación: en esta **forma factorizada** de la función cuadrática, si la función toma un valor máximo, este valor máximo será mayor que cero y, el parámetro a tomará un valor **negativo** debido a que el producto de factores $(x - x_0)$ y $(x - x_1)$ será negativo por tener signos distintos cuando x tome valores entre x_0 y x_1.

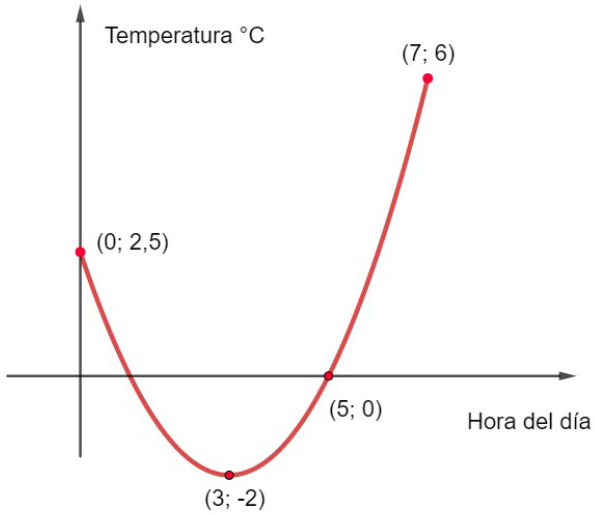
Tarea 2: Obtener la fórmula de una función cuadrática cuya gráfica sea una parábola que intersecte al eje x en x=2 y x=6 y cuyo valor máximo sea 20.

Solución: ahora, como la parábola intersecta al eje x en otros valores, la fórmula tendrá la forma f_2 (x) = *a* · (x - 2) · (x - 6). Además el producto (x - 2) · (x - 6) en x=4 tendrá el mismo valor que el producto x · (x - 4) en x=2 (¿por qué?) y, como la parábola alcanza la misma altura máxima que la parábola del primer tiro vertical podemos afirmar que *a* = -5 también ahora. Finalmente la fórmula de la función cuadrática buscada es f_2 (x) = -5 · (x - 2) · (x - 6).

[2] En un estudio más profundo del tiro vertical se puede ver que, para que sea posible un tiro vertical con estas últimas características, la aceleración de la gravedad debería disminuir.

PROBLEMA 3: TEMPERATURAS Y MÍNIMO DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

El siguiente gráfico de una función cuadrática describe la temperatura (en °C) registrada en la ciudad de Esquina de la provincia de Corrientes, desde las 0 hasta las 7 de la mañana en el día más frío del año. La temperatura mínima fue de -2 °C a las 3 de la mañana.



Teniendo en cuenta la simetría de la función cuadrática se pueden responder a preguntas como: ¿Cuál fue la temperatura a las 0 horas? A las 5 de la mañana la temperatura fue de 0 °C ¿en qué otro horario se registró esa temperatura? ¿Cómo lo obtuviste? ¿Cuál es la temperatura a las 6 de la mañana? La idea es responder las preguntas sin estar adivinando el valor, o sea, dar argumentos de porqué el valor propuesto es el que tiene que ser.

Luego se puede plantear una consigna similar a la propuesta en el problema del tiro vertical y cuya respuesta se obtiene de manera similar: *indica cuál de estas fórmulas puede representar la situación planteada en el gráfico, donde x representa la hora del día y f(x) la temperatura registrada en cada momento.*

a) $f(x) = -0,5\ (x - 1)\ (x - 5)$ **b)** $f(x) = x^2 + 2,5$ **c)** $f(x) = 0,5\ (x - 1)\ (x - 5)$

En este ejemplo, a diferencia de los problemas vistos hasta el momento, **la parábola tiene un mínimo** y las ramas se orientan hacia arriba. La fórmula que representa la situación es la opción c) donde el factor **a = 0,5** es **positivo**. El factor a tiene que ser positivo porque el producto de los factores **(x - 1) (x - 5)** es negativo cuando x toma valores entre 1 y 5; y, al ser a positivo, la función toma valores negativos en el intervalo (1;5) alcanzando el mínimo cuando **x = 3**.

Observación: en esta f**orma factorizada** de la función cuadrática, si la función toma un valor máximo, este valor máximo será mayor que cero y, el parámetro *a* tomará un valor **negativo** debido a que el producto de factores $(x - x_0)$ y $(x - x_1)$ será negativo por tener signos distintos cuando x tome valores entre x_0 y x_1.

Sintetizando: Las fórmulas del tipo $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ corresponden a funciones cuadráticas. La letra a representa un número real que no puede ser 0. Además, x_1 y x_2 representan las raíces de la función. Esta expresión de la fórmula de la función cuadrática se llama **factorizada** y permite representar las funciones cuadráticas que tienen raíces reales.

El valor de a en la fórmula indica la orientación de la parábola: si a es positivo, las ramas de la parábola se orientan hacia arriba, y si a es negativo, se orientan hacia abajo.

Una dificultad de las funciones cuadráticas: ¿cómo hallar la preimagen de un valor determinado de la función?

Supongamos que en el problema de los rectángulos de distinta área y perímetro constante igual a 50 se pregunta: ¿cuánto mide la base de un rectángulo si se sabe que la superficie es de 128,16 cm²?

Una posibilidad sería buscar la solución por tanteo, es decir probar con distintos valores de la variable x hasta encontrar uno que cumpla con la igualdad: $x \cdot (25 - x) = 128{,}16$

Pero, ¿qué sucede si se pretende resolver con un método algebraico?, es decir ¿qué sucede si se quiere “despejar” la x en la ecuación? Parece ser que, al no poder “juntar” las x, no es posible despejar la incógnita.

Sin embargo, existe el recurso algebraico “completar cuadrados” que permitirá “juntar” las x para luego sí despejarla. Como $x\,(25 - x) = -1 \times (x - 25)$, se puede escribir:

$x^2 - 25x = -128{,}16 \Rightarrow x^2 - 25x + 12{,}5^2 = -128{,}5 + 12{,}5^2 \Rightarrow (x - 12{,}5)^2 = 28{,}09$

Con este recurso algebraico se logró que **la x aparezca una sola vez en la ecuación** y de esta manera se puede despejar la variable.

Despejando x, se llega a dos valores posibles: $x - 12{,}5 = 5{,}3$ o $x - 12{,}5 = -5{,}3$ por lo que $x = 17{,}8$ o $x = 7{,}2$

Es decir que, volviendo al problema, hay dos rectángulos posibles, uno con base de 7,2 y otro de 17,8 que tiene como área 128,16.

Además de poder resolver esta ecuación (también se podrían resolver otras similares en forma análoga), la técnica de completar cuadrados, permite obtener otra forma de escribir la fórmula de la función cuadrática que, como se verá, es muy útil para responder determinadas cuestiones.

FORMA CANÓNICA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

La función f definida por la fórmula factorizada $f(x) = -1 \cdot x \cdot (x - 25)$ se puede escribir de otra manera:

$f(x) = -1 \cdot x \cdot (x - 25) = -1\,(x^2 - 25x) = -1\,(x^2 - 25x + 12{,}5^{\,2}) + 12{,}5^2 =$
$= -1\,(x - 12{,}5)^2 + 156{,}25$

Es decir que se encontró otra forma de escribir la función cuadrática: $f(x) = -1\,(x - 12{,}5)^2 + 156{,}25$ ¿qué representan el 12,5 y el 156,25?

Recordar que, teniendo en cuenta el contexto del primer problema, se **demostró geométricamente** que 12,5 es la medida del lado del rectángulo (un cuadrado en este caso) de mayor área y 156,25 es justamente el área de ese rectángulo. Gráficamente el punto (12,5; 156,25) es el vértice de la parábola, pero, todavía no se realizó una demostración analítica de que este punto es el máximo de la función.

LA FORMA CANÓNICA Y NUEVAS POSIBILIDADES

Recordar que, en el primer ejemplo, para demostrar que la función tiene un máximo en $x = 12{,}5$ utilizamos en contexto geométrico. Pero no lo hicimos algebraicamente teniendo en cuenta la fórmula de la función. Utilizando la forma canónica es posible demostrar esto algebraicamente partiendo de la expresión $(x - 12{,}5)^2$ que es mayor o igual que cero cualquiera sea el valor de x por tratarse de una expresión elevada al cuadrado.

Como $(x - 12{,}5)^2 \geq 0$, $-5 \cdot (x - 12{,}5)^2 \leq 0$ y sumando miembro a miembro 156,25 se tiene que $-5 \cdot (x - 12{,}5)^2 + 156{,}25 \leq 156{,}25$.

Es decir que $f(x) \leq 156{,}25$ cualquiera sea el valor de x y, como el único valor donde f alcanza este valor es en $x = 12{,}5$; se puede afirmar que la función **tiene un máximo en el punto (12,5 ; 156,25)**, vértice de la parábola.

Veamos la forma canónica de la función cuadrática con la que describimos el **tiro vertical**:

$f(x) = -5 \cdot x \cdot (x - 4)$

$f(x) = -5\,(x^2 - 4x) = -5\,(x^2 - 4x + 2^2) + 20 = -5\,(x - 2)^2 + 20$

En forma similar al ejemplo anterior, ahora se puede demostrar de manera algebraica, que la función tiene un máximo en $x = 2$, y que éste vale 20. Además, de la fórmula escrita en esta forma canónica, se puede "extraer" las coordenadas del punto máximo de la parábola y decir que el punto (2; 20) es el vértice de la parábola.

Notar que el -5 aparece en las dos fórmulas **(la factorizada y la canónica)** y, como se vio en la forma factorizada, si el valor es negativo, significa que las ramas de la parábola se orientan hacia abajo, y si es positivo se orientan hacia arriba.

Además de permitir demostrar que tiene un máximo en un determinado valor, es posible hallar el valor de las preimágenes de un determinado valor que tome la función.

Por ejemplo:

En el problema 2, se puede preguntar: ¿al cabo de cuánto tiempo la piedra alcanza 10 metros de altura?

Notar primero que, si la piedra alcanza 20 metros de altura al cabo de 2 segundos, no alcanzará 10 metros de altura al cabo de un segundo, ya que **a la mitad de tiempo no le corresponde la mitad de altura** ¿por qué?

Notar también que si se tiene la expresión factorizada:
$f(x) = -5\,x\,(x - 4)$ no es posible, despejar x en la ecuación que se obtiene de hacer $f(x) = 10$, es decir, no es posible despejar x en la ecuación $-5\,x\,(x - 4) = 0$ sin cambiar la forma de su expresión. Si se cambia la función a la forma canónica, sí es posible resolver la ecuación $f(x) = 10$, planteando la igualdad, $f(x) = -5\,(x - 2)^2 + 20 = 10$
$(x - 2)^2 = 2$ $\qquad x = 2 + \sqrt{2}$ $\qquad$ o $\qquad x = 2 - \sqrt{2}$

Sintetizando: Las fórmulas del tipo $f(x) = a \cdot (x - x_V)^2 + y_V$ corresponden a funciones cuadráticas. Esta expresión de la fórmula se llama **canónica**.

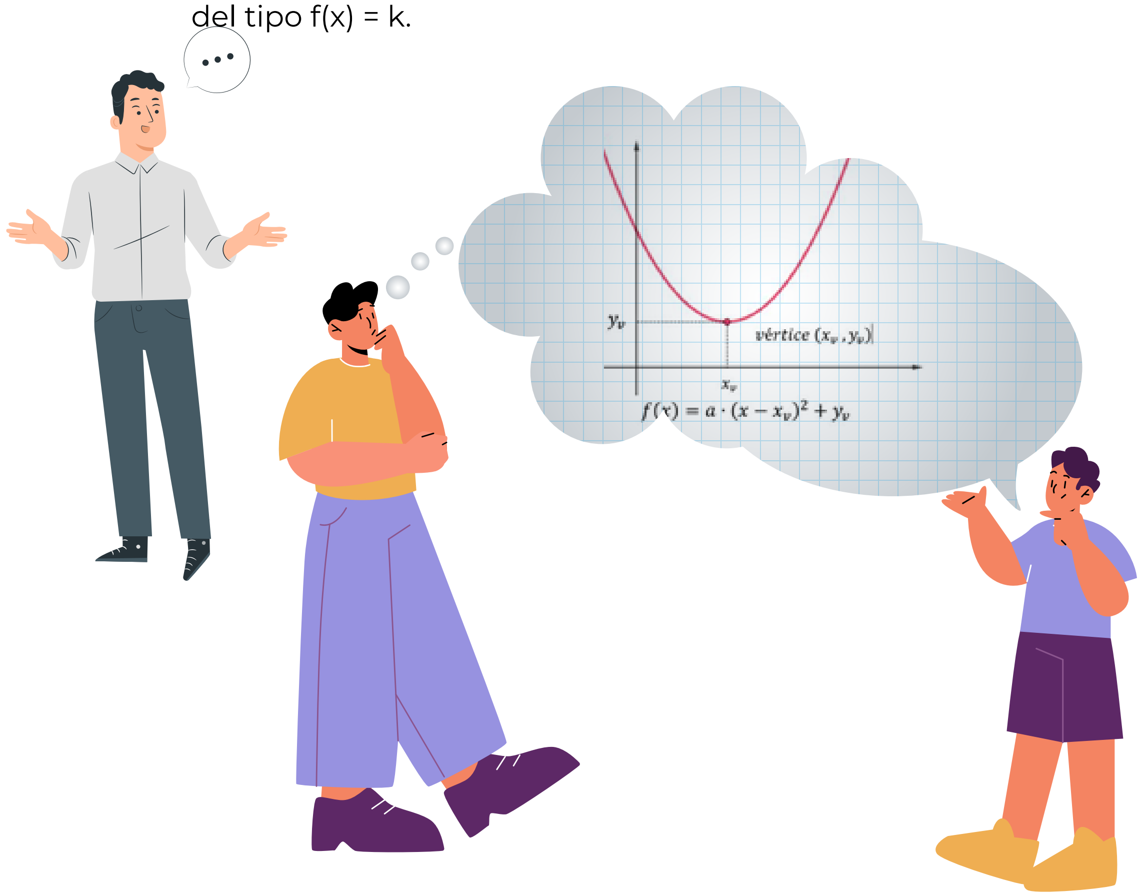
En este caso, x_V e y_V son dos números reales cualesquiera y la letra a representa un número que no puede ser 0.

El valor de a en la fórmula indica la orientación de las ramas de la parábola. Si a es un número positivo, las ramas de la parábola se orientan hacia arriba y la función tiene un mínimo. Si a es negativo, las ramas de la parábola se orientan hacia abajo y la función tiene un máximo.

El valor de y_V corresponde al máximo o mínimo de la función.

En el gráfico, el punto $(x_V ; y_V)$ corresponde al vértice de la parábola.

Esta forma canónica de la función permite demostrar analíticamente que la función tiene un mínimo o un máximo y, además, permite calcular la o las preimágenes de un valor dado de la imagen o, lo matemáticamente equivalente, resolver ecuaciones del tipo $f(x) = k$.



Para finalizar se muestra un cuadro que caracteriza y compara los modelos lineales y cuadráticos.

Aspecto a comparar	**Modelo lineal**	**Modelo cuadrático**
Tipo de variación.	La variación de la función es constante: a variaciones iguales de la variable independiente le corresponden variaciones iguales de la variable dependiente.	La variación de la función no es constante: la variación de la función varía linealmente.
Crecimiento y decrecimiento.	La función es creciente **o** decreciente en todo el dominio donde está definida.	La función crece en un tramo **y** decrece en otro tramo.
Dominio e imagen.	La función lineal se puede definir en el conjunto de los números reales, es decir que tanto el dominio como la imagen de la función no se encuentran acotadas.	Las funciones cuadráticas tienen como dominio, a todos los números reales, pero alcanzan un mínimo o un máximo, en un punto que se llama vértice de la función.
Clasificación.	La función lineal es inyectiva: cada valor de la imagen tiene un único valor como pre imagen. La función es sobreyectiva: todos los números reales son imagen de algún número del conjunto de partida.	La función no es inyectiva: cada valor de la imagen (salvo el valor máximo o mínimo) tiene dos valores posibles como pre imagen. La función no es sobreyectiva: Existen números reales que no forman parte del conjunto imagen de la función.
Forma de la gráfica.	La gráfica de la función es una recta.	La gráfica de la función es una parábola.
Raíces o ceros.	Una función lineal tiene una única raíz. La gráfica intersecta al eje x en un único punto.	Una función cuadrática puede tener una, dos o ninguna raíz. La gráfica puede intersectar o no al eje x, en caso de hacerlo, puede ser en uno o dos puntos.
Simetría.	La gráfica no presenta simetrías.	La gráfica es simétrica respecto a la recta vertical que pasa por el vértice de la parábola. Esta recta se llama eje de simetría de la parábola.
Formas de la fórmula.	Con la forma explícita de la función ($f(x) = a\,x + b$) se pueden realizar las tareas requeridas en el nivel secundario.	Según la tarea que se quiera desarrollar, conviene trabajar con una u otra expresión. En este documento hemos trabajado se trabajó con dos formas de la función cuadrática. La forma factorizada: $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2)$ La forma canónica: $f(x) = a \cdot (x - x_v)^2 + y_v$

BIBLIOGRAFÍA

- Diseño Curricular Jurisdiccional. Ciclo Orientado de la Educación Secundaria. Bachiller en Ciencias Sociales. (2016) Ministerio de Educación de la provincia de Corrientes.

- Sessa, C. (2005): Iniciación al estudio didáctico del álgebra. Editorial Libros del Zorzal.

- Sessa, C. y otros (2014): Aportes para la enseñanza. Nivel Secundario. Matemática. Función cuadrática, parábola y ecuaciones de segundo grado. Funciones de 2do grado. Ministerio de Educación de la Ciudad de Buenos Aires.

GOBIERNO PROVINCIAL

CORRIENTES

somos todos!

Ministerio de Educación

Dirección de Planeamiento e Investigación Educativa

DR. GUSTAVO VALDÉS
GOBERNADOR DE CORRIENTES

LIC. PRÁXEDES YTATÍ LÓPEZ
MINISTRA DE EDUCACIÓN

REINA a CABALLO