

ÁREA
MATEMÁTICA

**SERIE III. FORTALECIMIENTO
EN MATEMÁTICA. CICLO BÁSICO
NIVEL SECUNDARIO
CICLO LECTIVO 2023**

LAS FUNCIONES Y SUS GRÁFICAS



CORRIENTES
somos todos!

Ministerio de
Educación

1983/2023
40 AÑOS DE DEMOCRACIA

Dirección de Planeamiento
e Investigación Educativa

AUTORIDADES PROVINCIALES

DR. GUSTAVO VALDÉS

GOBERNADOR DE CORRIENTES

LIC. PRÁXEDES YATÍ LÓPEZ

MINISTRA DE EDUCACIÓN

DR. JULIO CÉSAR DE LA CRUZ NAVÍAS

SUBSECRETARIO DE GESTIÓN EDUCATIVA

DRA. PABLA MUZZACHIODI

SECRETARIA GENERAL

PROF. SERGIO JOSÉ GUTIERREZ

DIRECTOR GENERAL DE NIVEL SECUNDARIO

LIC. JULIO FERNANDO SIMONIT

DIRECTOR DE PLANEAMIENTO
E INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

COMISIÓN REDACTORA

PROF. EDITH NOEMÍ GOROSTEGUI

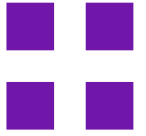
PROF. DIEGO FRANCISCO VILOTTA

PROF. MARÍA ITATÍ GÓMEZ

INTRODUCCIÓN	3	12	SOBRE EL CONTEXTO DEL PROBLEMA
4	ACERCA DE LAS PRÁCTICAS ÁULICAS CON GRÁFICOS CARTESIANOS	ANÁLISIS DIDÁCTICO DEL PROBLEMA	13
ACERCA DEL CONTEXTO DE LOS PROBLEMAS	5	14	ORGANIZACIÓN, ANÁLISIS Y DEDUCCIÓN DE LA INFORMACIÓN EN OTROS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN
5	PROPUESTAS DE ACTIVIDADES	2. GRÁFICOS Y COMPORTAMIENTO DE LAS VARIABLES	15
1. GRÁFICOS EN CONTEXTOS REALES COMO RECURSO DIDÁCTICO	6	15	PROBLEMA 4: TEMPERATURA DEL HORNO
6	PROBLEMA 1: TEMPERATURA DE UN PACIENTE	ANÁLISIS DIDÁCTICO DEL PROBLEMA	16
CONSIDERACIONES MATEMÁTICAS Y OBJETIVOS DE APRENDIZAJE	7	18	CONSIDERACIONES SOBRE LA GESTIÓN DE LA CLASE
7	CONSIDERACIONES DIDÁCTICAS ACERCA DEL TRABAJO EN CLASE	PROBLEMA 5: ENTRENAMIENTO EN EL CLUB	18
PROBLEMA 2: PRECIPITACIONES EN LA PROVINCIA DE CORRIENTES	9	19	DIFERENCIAS Y SEMEJANZAS CON EL PROBLEMA 4
10	A. FAMILIARIZACIÓN CON EL CONTEXTO Y REPRESENTACIÓN DE INFORMACIÓN EN GRÁFICOS CARTESIANOS	SOBRE LAS CONCEPCIONES E IDEAS DE LOS ESTUDIANTES	19
B. COMPARACIÓN DE INFORMACIÓN DE UNA MISMA CURVA	10	21	PROBLEMA 6: DE LA ESCUELA AL CLUB
11	C. COMPARACIÓN DE INFORMACIÓN DE AMBAS CURVAS	3. GRÁFICOS Y TABLAS DE VALORES	22
PROBLEMA 3: VARIACIÓN DE LA PRESIÓN MÁXIMA	11	22	PROBLEMA 7: ALCANCES DE LA INFORMACIÓN BRINDADA POR TABLA DE VALORES
		REFLEXIONES FINALES	24
		25	BIBLIOGRAFÍA



INTRODUCCIÓN



Uno de los objetivos del ciclo básico del nivel secundario, es que los estudiantes adquieran herramientas para leer e interpretar la información provista en diversos registros de representación (gráficos, tablas, fórmulas) de manera autónoma y reflexiva.

“Las gráficas y su interpretación, son herramientas fundamentales para el desarrollo de ciudadanos críticos con capacidad para tomar decisiones a partir del estudio de determinados fenómenos, sean estos naturales o sociales.” (Adam, R; Bella, A y Díaz A; 1999)

En el Diseño Curricular de la provincia de Corrientes, los contenidos relacionados con estos objetivos se presentan gradualmente como se detalla seguidamente:

1er año

- Construcción e interpretación de las relaciones en distintas representaciones: tabla, y gráfico cartesiano.
- Interpretación de tablas y gráficos. Análisis de sus ventajas y desventajas en función de la información que se quiere comunicar.

2do año

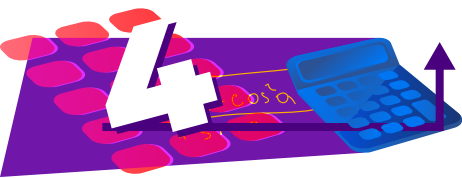
- Construcción e interpretación de las funciones numéricas en distintas representaciones: simbólica, tabla, gráfico cartesiano.
- Propuesta de situaciones problemáticas que requieran:
 - Interpretar relaciones entre variables en tablas, gráficos y fórmulas en diversos contextos (regularidades numéricas, proporcionalidad directa e inversa).
 - Modelizar variaciones uniformes y expresarlas eligiendo la representación más adecuada a la situación.

3er año

- Construcción e interpretación de gráficos de las funciones de variación uniforme.

Por otra parte, en los operativos de evaluación nacional (Aprender) e internacional (PISA) así como en el de la jurisdicción *Corrientes Operativo Provincial de Evaluación (COPE 2022)*, el objetivo es conocer hasta qué punto los estudiantes de quince años (PISA) y/u otros cercanos al final de la educación obligatoria (Aprender y COPE) han adquirido algunos de los conocimientos y habilidades necesarios para la participación plena en la sociedad del saber. En este sentido, el análisis e interpretación de gráficos ocupan un lugar destacado entre los ítems de evaluación.

Ahora bien, es importante atender al recorte y énfasis de estos contenidos al momento de diseñar las propuestas de enseñanza. En este documento se hace una propuesta de trabajo considerando lo que se requiere de estos temas para la formación de un estudiante del nivel secundario, en relación con la interpretación de los gráficos cartesianos y la información brindada por tabla de valores, según los documentos curriculares mencionados.



ACERCA DE LAS PRÁCTICAS ÁULICAS CON GRÁFICOS CARTESIANOS

Habitualmente las tareas demandadas a los estudiantes se restringen a determinar una de las coordenadas de un punto de la curva dada la otra o también, a identificar un punto teniendo como información los valores de las coordenadas dadas, así como caracterizar e identificar elementos que conforman un gráfico cartesiano (el cero en el gráfico, los nombres de los ejes: abscisa y ordenada, las variables involucradas etc.).

Siendo los gráficos portadores de valiosa información sobre un fenómeno en un contexto determinado, las preguntas no pueden reducirse sólo a identificar pares de valores, o a asignarles nombres a los objetos matemáticos, sino que, deberían favorecer el análisis del comportamiento (variación) de las variables a lo largo del gráfico, o en distintos tramos del mismo, entre otros aspectos.

Así también, algunas prácticas áulicas restan importancia al análisis de gráficos, ignorando el potencial que representan como recurso de aprendizaje y como herramienta de uso social en distintas áreas de trabajo (economía, política, ingeniería, estudios sociales...) y en otras ciencias (estadística, naturales, física, biología...). Éstos constituyen una forma de conocimiento y de transmisión básica de la información sobre el mundo de hoy. Además, a través del análisis de los contenidos que brindan es posible construir nuevos conceptos de manera intuitiva y visual que, progresivamente, permitirán elaborar ideas cada vez más integradoras y abarcativas como, por ejemplo, del concepto de función.

Por otro lado, se asigna una importancia superlativa al aprendizaje de la construcción de curvas, a partir de datos que se obtienen de fórmulas de funciones elementales (lineal, cuadrática, exponencial, ...) dadas por el docente y la tarea para los estudiantes consiste en construir una tabla de valores de las variables involucradas, operando en función de la fórmula dada. Si bien es necesario que éstos aprendan a graficar funciones, a partir de tablas de valores, es importante situarlo en un momento del proceso de aprendizaje, que contemple el análisis de la información que provee el gráfico y no como práctica de una técnica cerrada, sin que quede claro la razón de ser de esas técnicas y, por consiguiente, la utilidad de estos conocimientos para la resolución de problemas. De este modo, se soslaya la importancia de la participación plena, que poseen en la construcción de los conocimientos de este objeto matemático, relegando su rol a una mera ilustración de conceptos presentados previamente por el docente. A la vez, no se contempla la formación integral que todo estudiante requiere como ciudadano y que está prescripto en los distintos materiales curriculares citados.

Desde la perspectiva adoptada en este documento, queda claro que la escuela no puede ignorar la importancia que tienen los conocimientos matemáticos, relacionados con esta herramienta, a la hora de pensar la formación de un estudiante para esta sociedad. Así, un docente frente a un gráfico será necesario que se pregunte: **¿Qué información contiene?** **¿Para qué se utiliza este gráfico en el contexto de origen?** y luego incorporarlos a sus objetivos de aprendizaje, por ejemplo, planteándose: **¿Qué preguntas proponer a los estudiantes de manera que favorezcan**





la lectura, el análisis e interpretación de la información que portan? En este sentido se proponen un conjunto de actividades que demandan a los estudiantes la interpretación y descripción verbal de la información dada en gráficos cartesianos y tablas que, a través de la gestión pertinente del docente, habilitan un proceso de producción de conocimientos, proceso éste, necesario para el aprendizaje.

ACERCA DEL CONTEXTO DE LOS PROBLEMAS

Desde el punto de vista del diseño o selección de los problemas que se presentan a los estudiantes vale la pena preguntarse: **¿Con qué criterios se podrían seleccionar contextos extramatemáticos, válidos para promover la alfabetización matemática? ¿Qué características deben poseer los problemas y las tareas que se planteen a partir de ellos? ¿En qué cambian los problemas y las tareas asociadas a los contextos extramatemáticos con respecto a los intramatemáticos?** entre otras cuestiones.

En esta oportunidad todos los problemas fueron diseñados en el marco de contextos extramatemáticos. Como se verá, son de distinta complejidad y atienden a diferentes cuestiones de cada representación particular: gráficos cartesianos y tablas de valores.

La decisión respecto del contexto adoptado se fundamenta en conceptos claves, como los siguientes: *"...Los contextos externos muchas veces aportan aquello que la matemática todavía no puede aportar (porque no se conoce) y justamente ayuda a entender el funcionamiento de un cierto modelo, pero otras veces justamente ocultan aquello que se espera que los alumnos produzcan; en algunos caso permiten controlar la tarea que se realiza y en otros casos no ofrecen herramientas para ello..."* (Sadovsky: 2005; Pág. 98).

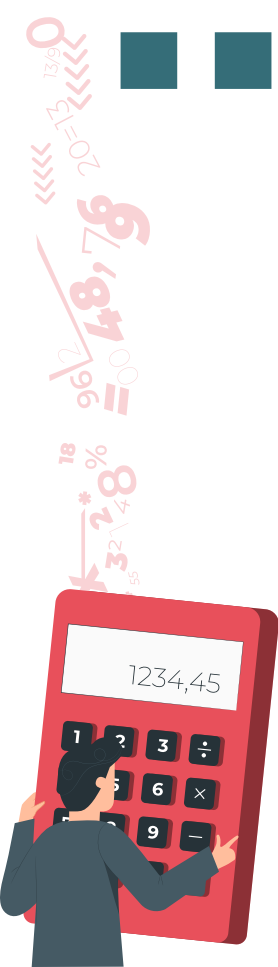
Por otro lado, *"...son interesantes los contextos que funcionan como sostén de algunas ideas, aunque dicho sostén no sea muy riguroso o no pueda atrapar todas las ideas vinculadas al concepto que se quiere comunicar..."* (Sadovsky: 2005; Pág. 103).

PROPUESTA DE ACTIVIDADES

Existe una amplia variedad de gráficos disponibles en la web y en libros de textos, que portan información relevante para su tratamiento en las clases de matemática en el ciclo básico. Algunos son elaborados por instituciones oficiales y privadas, con el objetivo de informar sobre asuntos o fenómenos de interés para la población y otros que, si bien refieren a un contexto también real, son elaborados con una clara intencionalidad didáctica. En ambos casos se trata de situaciones cuyo estudio (análisis e interpretación) tiene cabida en la escolaridad obligatoria, dado que, en nuestra sociedad actual, tanto los portales de comunicación -gráficos y digitales- como los organismos y empresas, se valen de este recurso no sólo para informar, sino también organizar la información para la toma de decisiones.

A continuación, se presentan los problemas agrupados en tres grandes apartados, atendiendo cada uno de estos a una determinada intencionalidad didáctica.

El **primer grupo** (problemas 1, 2 y 3) corresponde a gráficos confeccionados por dos estamentos de nuestra sociedad: los profesionales de la salud (médicos e investigadores) y organismos oficiales como puede ser la Dirección de Estadísticas y Censos, de la Subsecretaría de Sistemas y Tecnologías de la Información del Ministerio de Haciendas y Finanzas de la provincia de Corrientes, con el objetivo de contar con información para la toma de decisiones. Desde el punto de vista didáctico, se trata de un





buen anclaje para una primera aproximación a un tipo de registro de representación en matemática (representación de dos variables en un par de ejes y su relación entre las mismas representadas por puntos de una curva), al mismo tiempo que colaboran con la formación integral del ciudadano; en este caso, con la capacidad de analizar para identificar información contextualizada y discriminar aquellas relevantes de las que son secundarias.

El **segundo grupo** (problemas 4, 5 y 6) se diseñó tomando en cuenta propuestas de libros de texto del nivel secundario. Si bien se refieren a contextos reales, fueron elaborados como recursos didácticos para iniciar el tratamiento de temas específicos como: intervalos de crecimiento, decrecimiento y de valor constante, valores máximo y mínimo, etc., en un contexto familiar para los estudiantes. Es oportuno aclarar que, en la definición de las preguntas de análisis, se consideró una cuestión fundamental cuando se trabaja con contextos reales y es que las mismas deben tener sentido dentro del contexto.

El **tercer grupo** de problemas - en este caso el problema 7- se agrega el estudio de otro registro de representación como son las **tablas de valores**. Se analizan los alcances y limitaciones de este “nuevo” registro de representación, teniendo en cuenta o poniendo en relación con el contexto del problema y, por otro lado, su relación con posibles gráficos.



GRÁFICOS EN CONTEXTOS REALES COMO RECURSO DIDÁCTICO

PROBLEMA 1: temperatura de un paciente

A todo paciente que ingresa al hospital y es internado se le realizan distintos controles de rutina, como la presión arterial y la temperatura. En general, estos datos se registran en tablas y gráficos. Este es el gráfico de la temperatura de un paciente que se registró durante los días que estuvo internado, las cuales fueron tomadas por la mañana y por la tarde a la misma hora.

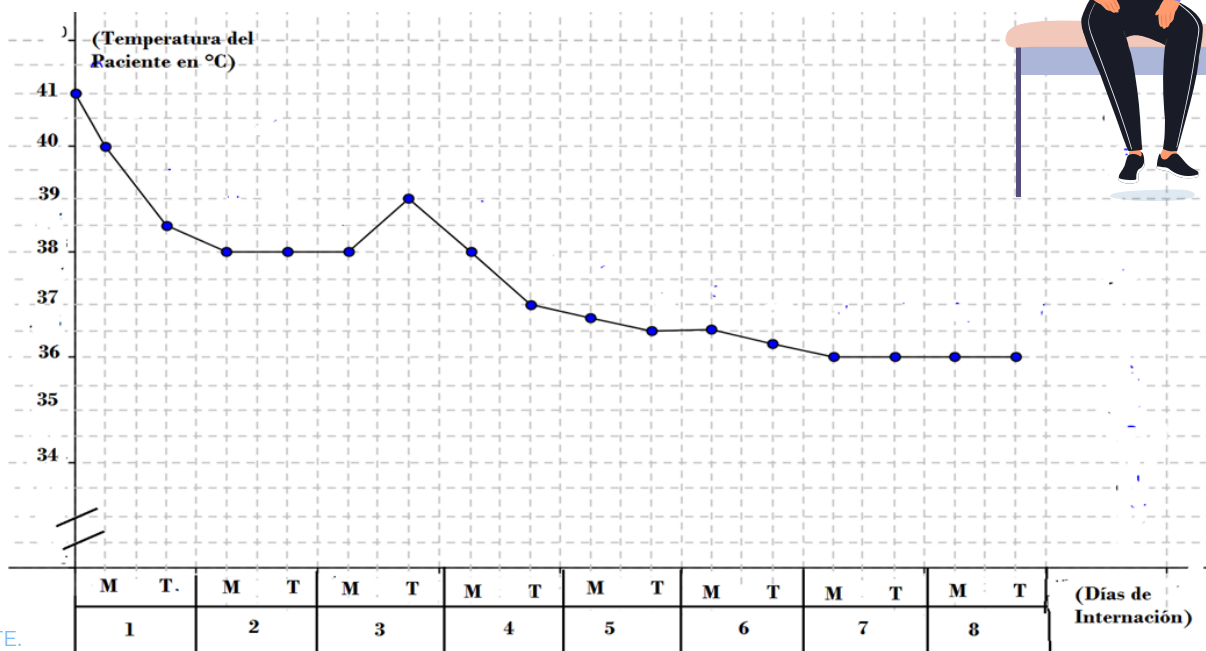


FIG. 1: FICHA MÉDICA DE UN PACIENTE.



¿Qué información se puede extraer del paciente a partir del gráfico?

Responde las siguientes consignas describiendo qué observaron en el gráfico:

- a) ¿En qué momento la temperatura del paciente empezó a descender?
- b) ¿Qué sucedió con la temperatura del paciente durante el segundo y el tercer día?
- c) ¿Qué temperatura se registró en la tarde del día 3?
- d) ¿A partir de qué momento se puede decir que la temperatura del paciente se normaliza?
- e) ¿En qué momento la temperatura del paciente fue de 39° ?
- f) ¿En algún momento de la internación el paciente registró 37° de temperatura? En caso de responder afirmativamente, ¿cuándo?
- g) ¿Cuántos días estuvo internado?

CONSIDERACIONES MATEMÁTICAS Y OBJETIVOS DE APRENDIZAJE

Si bien no es un gráfico de los considerados estándar dentro de la matemática, sino que corresponde a uno típico de uso cotidiano en centros de salud como hospitales y sanatorios, forma parte de la práctica habitual en otras áreas de conocimiento, pero, no por este motivo carece del rigor matemático necesario, dado que atrapa en esencia las características de esta forma de representación matemática (gráfico cartesiano): relación entre dos variables (días de internación y temperatura), escala, variabilidad, máximos, mínimos, tramos constantes; es posible realizar lecturas puntuales, de a tramos y globales.

Es importante aclarar, que la decisión de utilizar este gráfico como recurso didáctico para enseñar conceptos sobre los gráficos cartesianos, exige una flexibilidad por parte del docente en cuanto a ciertas *libertades*, respecto de la aplicación de las convenciones en la confección del mismo (escala, origen del sistema de coordenadas, datos de la variable independiente). Esas *libertades* no implican, en absoluto, pérdida de rigor matemático y, menos aún, que este uso implique una comunicación de conocimientos erróneos.

Se trata de ejercer como docente una vigilancia epis-

temológica, con el objetivo de garantizar que su uso en el contexto extramatemático de este ejemplo, no represente un cambio sustancial en relación con los conceptos involucrados en el objeto matemático “gráfico cartesiano” que se quiere enseñar. Precisamente la pertinencia de este gráfico, se justifica en que reúne las condiciones didáctico-matemáticas como recurso didáctico: 1) es comprensible por los estudiantes, por lo que se ajusta a una primera aproximación al tema; 2) es riguroso en el sentido de que comunica la información en forma precisa; 3) permite el estudio de cuestiones fundamentales de lo que implica el trabajo con la información que se representa en gráficos cartesianos; entre otros aspectos.

Se trata, en este caso, de no dar a las representaciones un valor por encima de lo conceptual y, por otro lado, de discutir con los estudiantes la cuestión de que los gráficos cartesianos pueden sufrir adaptaciones en función del contexto, de lo que se quiere comunicar y/o registrar por algún motivo.

Existirán momentos -posteriores, claramente- en donde las cuestiones más formales serán objeto de estudio.

CONSIDERACIONES DIDÁCTICAS ACERCA DEL TRABAJO EN CLASE

Un objetivo a lograr con esta situación, es que los estudiantes puedan explicitar la información que brinda el gráfico del paciente, lo que abarca múltiples aspectos y, para ello, se puede iniciar el análisis preguntando:

¿Qué información se puede extraer del paciente a partir del análisis de este gráfico? La idea es que se involucren con el problema e intenten extraer la información requerida de acuerdo con sus posibilidades.

Por ejemplo, podrían decir que la información que brinda el gráfico es: el paciente tenía fiebre al ingresar, estuvo ocho días internado, cuando ingresó tenía 41° de temperatura, todos los días, mañana y tarde le controlan la temperatura, se puede saber qué temperatura tiene a la mañana y a la tarde de cada día, si mejoró o no, cómo varió la temperatura durante la internación, etc.



Las intervenciones del docente, deberían dirigirse a ayudarlos para que amplíen sus ideas, que las formulen con mayor precisión, así como plantear otras, que pueden no haber sido formuladas por los estudiantes y cuestiones más puntuales que escapen a esta pregunta inicial. El objetivo es *asegurar* el tratamiento de las cuestiones matemáticas, que habilita este gráfico que, pudieron surgir o no al momento del tratamiento de la pregunta inicial y es facultad del docente, generar espacios de discusiones en temas específicos. En este sentido, si los estudiantes espontáneamente no advierten alguna información relevante, es importante que el docente las incorpore al debate. Por ejemplo, interrogando sobre: *¿dirían que el paciente ingresó con fiebre?* o si los estudiantes dicen que una información que se puede extraer es que ingresó con fiebre, preguntar: *¿Por qué dijeron que tiene fiebre? ¿Qué información del gráfico tuvieron en cuenta para decir que el paciente ingresó con fiebre? ¿Con qué temperatura se dice que uno tiene fiebre?* Se trata de identificar el punto de la gráfica que corresponde a la temperatura con la que ingresa el paciente al hospital y determinar la que le corresponde a ese punto y así responder a la pregunta de si ingresó con fiebre o no. Cabe aclarar, que el dato de tener o no fiebre es un conocimiento del campo de la medicina, que puede no estar disponible para los estudiantes, por lo tanto, el docente debería generar un intercambio de información en la clase y acordar parámetros al respecto.

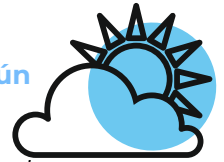
Las preguntas posteriores son ejemplos de informaciones que pueden ser relevantes en el contexto del problema y, desde el punto de vista didáctico, atrapan distintas cuestiones matemáticas tales como: lecturas globales y puntuales, lecturas de a tramos, variables involucradas, etc.

Se espera que luego de la puesta en común y debate, sobre lo que pensaron y elaboraron los estudiantes y las intervenciones del docente, con cada una de las preguntas se vayan institucionalizando las informaciones que brinda esta particular forma de presentarlas y que el docente, aporte la terminología específica del saber matemático. Se lista a continuación estas posibles conclusiones que se registrarán en las carpetas de los estudiantes:

- En este problema hay dos conjuntos de datos involucrados: días de internación y temperatura del paciente que se ubican en dos rectas perpendiculares. En matemática, estas rectas perpendiculares se llaman ejes coordenados. El eje vertical se llama “*eje de ordenadas*” y el eje horizontal “*eje de abscisas*”.
- Esta forma de representación (gráfico cartesiano) permite visualizar *cómo varía una cantidad en relación a otra*. (En este caso cómo varía la temperatura del paciente a medida que transcurren los días de internación).
- *Cada punto resaltado en la curva representa un dato relevado, correspondiente a una determinada temperatura del paciente en un momento del día de internación*. Por ejemplo, en la mañana del tercer día tenía 38° de temperatura.
- Los puntos están unidos y eso nos permite tener una idea de la **variación** de la temperatura del paciente, es decir, cómo fue evolucionando el paciente, en qué intervalo de tiempo tuvo fiebre y cuándo empezó a mejorar.
- *La lectura por tramos (intervalos de tiempo) de la variable independiente (días de internación) permite tener información respecto de la variable dependiente (temperatura del paciente), determinando si aumentó, disminuyó, se mantuvo constante, si hubo máximo, mínimo,*

etc. Por ejemplo, se observa en la gráfica que la temperatura fue descendiendo durante los tres primeros días de internación, dado que ingresó con 41° y para el tercer día a la mañana descendió a 38°. A la tarde de este tercer día, tuvo un pequeño pico de fiebre, ya que aumentó a 39° y luego continuó mejorando.

PROBLEMA 2: precipitaciones en la provincia de Corrientes según datos históricos y según valores del año 2019



En el siguiente gráfico se representa las precipitaciones en mm desde el mes de enero a diciembre de acuerdo a valores históricos y valores registrados del año 2019.



Precipitaciones (en mm) por mes. Valores históricos y año 2019

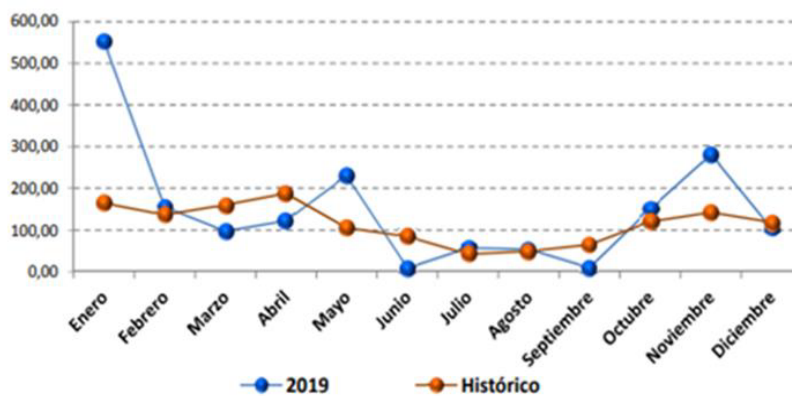


FIG. 2: PRECIPITACIONES (EN MM) POR MES. VALORES HISTÓRICOS Y AÑO 2019. CORRIENTES EN CIFRAS 2020. DIRECCIÓN DE ESTADÍSTICAS Y CENSOS. SUBSECRETARÍA DE SISTEMAS Y TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN DEL MINISTERIO DE HACIENDAS Y FINANZAS DE LA PROVINCIA DE CORRIENTES.



1. ¿Qué información es posible obtener de este gráfico?
2. ¿La cantidad de precipitaciones del año 2019, podría considerarse como un suceso habitual en Corrientes según los datos históricos?
3. De acuerdo con los datos históricos ¿Cuál es el mes con mayor precipitación en la Provincia de Corrientes? ¿Y cuál es el mes con menor precipitación?
4. Según los datos históricos ¿Podría decirse que en Corrientes llueve más durante el invierno que durante el verano?
5. En el año 2019 ¿Se registraron cantidades de precipitaciones inferiores a 100 mm? ¿Durante qué meses?
6. ¿En noviembre de 2019 llovió más que en octubre y diciembre?
7. En algún momento del año 2019 ¿Se registraron precipitaciones mayores a 200mm? De acuerdo a los datos históricos ¿Es habitual que esto ocurra?
8. De acuerdo a los datos del 2019 ¿Qué sucedió en junio, en comparación con la cantidad de precipitaciones caídas en dicho mes, según datos históricos?
9. Según los datos históricos el mes de mayores precipitaciones ¿Coincide con el registrado en el año 2019?

A diferencia del gráfico anterior, en este se representan dos curvas, correspondientes a la variación de la cantidad de precipitaciones, durante los meses del año en la Provincia de Corrientes, según datos históricos y según las ocurridas en el año 2019.



Tomando en cuenta lo que se plantea al inicio de este apartado - sobre la necesidad de que los estudiantes aprendan a obtener información relevante de un fenómeno proporcionada por un gráfico cartesiano - se presentan preguntas clasificadas, según distintas dimensiones de análisis: **A.** Familiarización con el contexto y representación de información en gráficos cartesianos. **B.** Comparación de información de una misma curva. **C.** Comparación de información de ambas curvas. Se trata de aprovechar al máximo las posibilidades de análisis que brinda el gráfico y, de esta manera, generar condiciones para el aprendizaje.

■ ■ **A. FAMILIARIZACIÓN CON EL CONTEXTO Y REPRESENTACIÓN DE INFORMACIÓN EN GRÁFICOS CARTESIANOS.**

1. *¿Qué información es posible obtener de este gráfico?*
2. *¿La cantidad de precipitaciones del año 2019 podría considerarse como un suceso habitual en Corrientes según los datos históricos?*

Se trata de preguntas que permiten una primera aproximación al fenómeno y, además, profundizar sobre la representación matemática utilizada para comunicar información.

La **pregunta 1** es abierta, en tanto que habilita un repertorio amplio de respuestas posibles por parte de los estudiantes, pero también de aclaraciones del docente. Por ejemplo, sobre el significado de precipitaciones, cómo se miden, a qué se refiere con dato histórico, qué representa la curva azul, la curva roja, los datos numéricos del eje vertical, entre otras cuestiones. Esto dependerá de las necesidades y demandas

de los estudiantes.

Las respuestas podrían incluir información proveniente de la lectura de puntos, de identificar máximos y mínimos, períodos de variación creciente y decreciente en cantidad de precipitaciones, de la comparación de la variación en una curva y otra, entre otros aspectos. Se espera en la clase, analizar la veracidad o no de las afirmaciones propuestas por los alumnos, para luego profundizar con preguntas puntuales.

La **pregunta 2**, lleva a analizar el comportamiento de la variación de la cantidad de precipitaciones caídas en el año 2019, en comparación con la gráfica de los datos histórico, desde un punto de vista global. El intercambio de los estudiantes entre sí y con el docente, debe incluir explícitamente, argumentos apoyados en los datos que se pueden observar en el gráfico, para afirmar por qué lo sucedido en el año 2019 no fue una situación habitual.

■ ■ **B. COMPARACIÓN DE INFORMACIÓN DE UNA MISMA CURVA**

3. *De acuerdo con los datos históricos ¿Cuál es el mes con mayor precipitación en la Provincia de Corrientes? ¿Y cuál es el mes con menor precipitación?*
4. *Según los datos históricos ¿Podría decirse que en Corrientes llueve más durante el invierno que durante el verano?*
5. *En el año 2019 ¿Se registraron cantidades de precipitaciones inferiores a 100 mm? ¿durante qué meses?*
6. *¿En noviembre de 2019 llovió más que en octubre y diciembre?*

Para responder cada una de las preguntas anteriores es necesario reparar en primer término que, las respuestas se elaboran identificando y analizando una de las dos curvas.

La **pregunta 3**, conlleva averiguar el mes con mayor cantidad de precipitaciones según los datos históricos

y para ello basta con comparar en la curva de datos históricos, los valores de la variable dependiente y reconocer entre ellos el valor máximo y mínimo, y por otra parte determinar a qué valores de la variable independiente corresponde.

La **pregunta 4**, implica evaluar de acuerdo con los datos históricos, si la cantidad de precipitaciones caídas en los meses de junio, julio y agosto (invierno) resultan mayores a las ocurridas en diciembre, enero y febrero (verano). Durante los meses de invierno no se supera los 100 mm de precipitaciones, mientras que en verano sí. Desde el punto de vista de la cuestión matemática involucrada, se trata de evaluar dos tramos de una misma curva.

Podría suceder que los estudiantes no dispongan de la información de los meses correspondientes a las estaciones de verano e invierno, por lo que podrían



preguntar al docente o éste asumir que es necesario proporcionarles esta información. Se trata de un saber cultural que no es del campo específico de la matemática, pero relevante en el proceso de elaboración de la respuesta. Desde este punto de vista no tienen cabida preguntas del tipo: *¿Durante qué meses llueve más en Corrientes? ¿A qué estación del año corresponden esos meses?* Tal como se mencionó, el objetivo desde el punto de vista del aprendizaje de los conocimientos matemáticos involucrados aquí, es analizar el comportamiento de la curva por tramos. Si bien para analizar este comportamiento es necesario identificar puntos de la curva para sacar una conclusión sobre un tramo (verano e invierno), no se trata de la misma competencia para el estudiante que el docente pregunte en primer término por los meses de mayor precipitación y luego a qué estación corresponden, a que sea el estudiante quien repare en la necesidad de contar con la información de cuáles meses integran las estaciones involucradas. Por otro lado, seguir esta secuencia de preguntas (los

meses de mayor precipitación y luego la estación correspondiente) no permite focalizar en la comparación de dos tramos, dado que, por ejemplo, hay meses en los que la precipitación fue alta y sin embargo no corresponde a alguna de las dos estaciones (verano o invierno).

Así también, algunas de las preguntas realizadas favorecen la lectura puntual de la información, pero no se reducen a identificar las coordenadas de puntos (preguntas 5 y 6). Por ejemplo, en la **pregunta 5**, se espera que se reconozca entre los valores de la ordenada correspondientes a los meses del 2019, cuáles fueron los valores inferiores a 100 mm. Si bien no se trata de identificar el valor preciso de cantidad de precipitaciones en ciertos meses, se trata de comparar con un valor, en particular aquellos que están por debajo de ese. En el caso de la **pregunta 6**, se trata de comparar el dato de precipitación en noviembre de 2019 -máximo relativo en este caso- respecto de un mes anterior (octubre) y el posterior (diciembre).

■ ■ C. COMPARACIÓN DE INFORMACIÓN DE AMBAS CURVAS

7. *En algún momento del año 2019 ¿Se registraron precipitaciones mayores a 200mm? De acuerdo a los datos históricos ¿Es habitual que esto ocurra?*

8. *De acuerdo a los datos del 2019 ¿Qué sucedió en junio, en comparación con la cantidad de precipitaciones caídas en dicho mes según datos históricos?*

9. *Según los datos históricos el mes de mayores precipitaciones ¿Coincide con el registrado en el año 2019?*

La **pregunta 7**, apunta a identificar en el gráfico de precipitaciones del 2019, en qué meses se registraron precipitaciones mayores a 200 mm, lo que significa que deben reconocer para qué valores de X (meses), corresponden valores de Y (cantidad de precipitaciones) mayores a 200 mm. Para responder la pregunta de si es habitual que esto ocurra, tienen que comparar cada uno de estos datos con los registros de estos mismos meses, en la curva de datos históricos.

La **pregunta 8**, implica comparar dos datos puntuales: la cantidad de precipitación del mes de junio según la curva de datos del 2019, con la cantidad correspon-

diente al mismo, pero en la curva de datos históricos. En este caso, es menor a lo que sucede habitualmente.

Por último, la **pregunta 9**, implica comparar el máximo de una curva, con el máximo de la otra. Saber que históricamente en abril se producen precipitaciones mayores que el resto de los meses, permite contrastar el mes de abril del año 2019 con el resto de los meses en ese mismo año, para determinar si este resulta el mes con mayor precipitación en el año 2019 o no.

Otra posibilidad para comparar los máximos de una curva con los máximos de la otra, es determinarlos primero en cada uno de los gráficos. En este caso a partir de esta información, identificar en la curva obtenida de los datos del año 2019, cuál es el valor máximo obtenido y en qué mes ocurrió.

Esta pregunta incluye comparar para un mismo valor de la variable independiente, el valor de la variable dependiente en un gráfico y otro.





PROBLEMA 3¹: variación de la presión máxima

Un paciente entra en la sala de urgencias de un hospital, para ser atendido por el aumento de su presión arterial. Durante un cierto tiempo se lo conecta a la máquina, que le controla la presión continuamente y produce un gráfico. En él aparece representada la variación de la presión máxima del paciente, respecto de la considerada normal (12 mm de mercurio), a partir del momento de su internación.

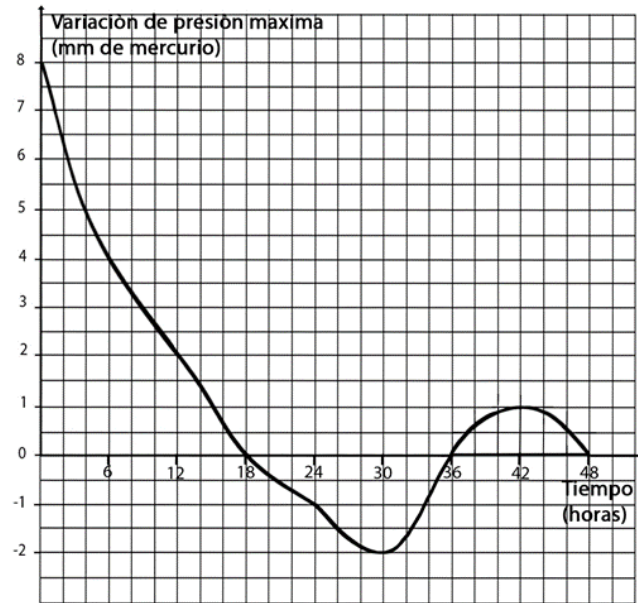


Fig 3. Variación de presión máxima

- ¿Con qué presión máxima ingresó el paciente?
- ¿Qué representan en este gráfico, los valores negativos que figuran en el eje vertical?
- ¿Tuvo presión máxima normal en algún momento durante su internación?
- De acuerdo con lo que se observa en el gráfico, ¿Durante cuánto tiempo estuvo este paciente en observación?

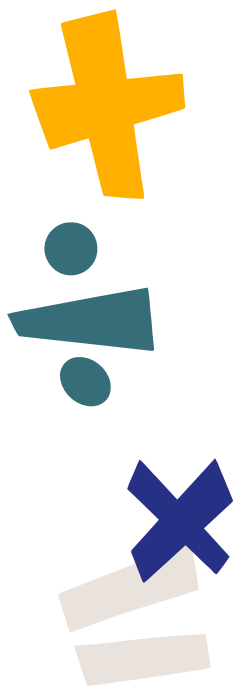
SOBRE EL CONTEXTO DEL PROBLEMA

Es un conocimiento social, que la **presión** arterial incluye dos mediciones: la **presión sistólica**, que se mide durante el latido del corazón (momento de **presión máxima**), y la **presión diastólica**, que se mide durante el descanso entre dos latidos (momento de **presión mínima**). Al respecto, este problema involucra el análisis de la presión arterial de un paciente, considerando sólo uno de ambos valores, el de la presión sistólica, en relación al valor de presión máxima normal (12 mm de mercurio) durante los días de internación.

En el trabajo con los estudiantes, habrá que tener especial atención con las concepciones (formales y sociales) que involucran ciertos términos en este problema. Por ejemplo, la idea de **presión máxima normal**.

Es sabido que, la presión máxima considerada "normal" para algunos pacientes puede ser alta (o baja) en comparación con la presión normal de otros. La idea de **presión máxima normal** aquí considerada no va en

¹Extraído de Itzcovich, H. (2007): Matemática I. Editorial Tinta Fresca.



ese sentido, sino que está considerada en base a una **medida convencional**, establecida por especialistas de la salud a nivel general.

A diferencia de los dos primeros problemas, en este, las respuestas a las preguntas planteadas no están consignadas en el gráfico. Es decir, la lectura de puntos no provee de respuestas inmediatas a las preguntas planteadas, pero proporcionan datos del gráfico, que habilitan la producción de nueva información.

Por ejemplo, la presión máxima con la que ingresó el paciente no está consignada en el gráfico. Sin embargo, es posible determinarla a partir de saber la diferencia entre la presión máxima y la normal al momento de internación, información que provee el punto (0; 8) en el gráfico: la presión máxima del paciente al momento de internación es 8 mm por encima de la normal. Así, la presión máxima del paciente al momento de internación, se puede obtener al pensar en $12 + 8$, 20 mm de mercurio.

ANÁLISIS DIDÁCTICO DEL PROBLEMA

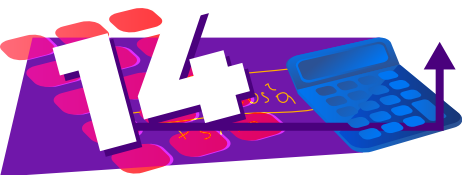
Entre las respuestas posibles a la primera pregunta, consideramos que además de la respuesta correcta, 20 mm de mercurio, pueden emerger entre los alumnos otras que, aunque no sean correctas, tienen valor especial por los conocimientos y explicaciones que habilitan.

Una es la de considerar 8mm, como valor de presión máxima. Es interesante esta respuesta, ya que el punto máximo de la curva es (0; 8) y se corresponde con información ligada al momento de internación y al punto máximo de la curva (0,8). En términos del contexto, es posible que los alumnos den argumentos de por qué 8mm no es la presión máxima del paciente al momento de la interacción, ya que es la diferencia, entre la presión máxima del paciente y la considerada normal en ese momento.

Otra posibilidad, es considerar que la presión máxima del paciente al momento de internación es 48 mm, en referencia al tiempo máximo de internación en horas del paciente. Si bien se trata de una respuesta incorrecta, esta no puede reducirse a un “problema de lectura” de los estudiantes, sino que tiene que ver con las variables involucradas y la información que representa la curva trazada, que es objeto de estudio en este problema. De hecho, la curva representada varía desde la hora 0 a la hora 48.

También es posible considerar, que el valor de presión máxima es 10 mm, teniendo en cuenta la amplitud del intervalo, entre el valor mínimo y máximo de presión máxima del paciente registrados durante toda su internación, dada por la diferencia entre -2 y 8 mm de mercurio.





IMPORTANTE: Tratar con los estudiantes sus respuestas, siendo estas correctas o no, es fundamental para comprender cuál es la información que está dada en el gráfico y cuál no y poder avanzar en las características propias de un gráfico cartesiano.

La pregunta **b** implica analizar el significado de los números negativos en función del contexto.

Los valores negativos que figuran en la representación, corresponden a valores de presión máxima, que se encuentran por debajo de la presión normal, es decir que corresponden a los valores de presión máxima menores a 12 mm. Nuevamente, esta cuestión permite volver sobre las variables involucradas en la situación y ubica la lectura de puntos al servicio de obtener nueva información.

La pregunta **c**, no es independiente de las otras, sino que obliga a reflexionar sobre cómo se expresa en el gráfico los momentos en los que el paciente se encuentra con la presión máxima normal. Estos momentos, se corresponden con los puntos de la curva que tienen ordenada cero, es decir los puntos en que la curva corta al eje de las abscisas (eje del tiempo).

Por otra parte, es interesante la lectura general de la variación de la presión máxima, durante el tiempo de internación que provee el gráfico, para dar respuestas a preguntas como la **c**: el paciente ingresó con una presión máxima alta y que durante las primeras 18 horas esta fue disminuyendo, hasta alcanzar un valor de presión normal a las 18 horas, continuó bajando hasta las 30 horas, en la que alcanzó 2 mm por debajo de la presión normal, luego comenzó a incrementarse alcanzando a las 36 horas un valor de presión normal.

La respuesta a la última pregunta (**d**), se obtiene de identificar el dominio de la función en este contexto, es decir el intervalo de tiempo, en el que la máquina que controla la presión máxima, le asigna al paciente un determinado valor. Geométricamente se trata de la longitud del segmento, que se obtiene de la proyección vertical de los puntos de la curva sobre el eje de abscisas. En este caso, es el segmento correspondiente al intervalo: $[0;48]$, que en términos del problema serían 48 hs o 2 días.

El valor 48, coincide con el correspondiente a la última toma de presión máxima del paciente y es el último ubicado en el eje de abscisas, sin embargo, en otras situaciones estos valores no necesariamente coinciden y, por lo tanto, no es un conocimiento generalizable y a futuro debería ser objeto de discusión con los estudiantes.

ORGANIZACIÓN, ANÁLISIS Y DEDUCCIÓN DE LA INFORMACIÓN EN OTROS REGISTROS DE REPRESENTACIÓN

Una propuesta que permite profundizar y aportar nuevos conocimientos a los estudiantes, consiste en proponerles actividades que demanden la organización de la información, que puede ser obtenida del gráfico y que implica poner en relación otra forma de representar puntos de la gráfica (pares ordenados), con la información que brindan estos puntos en términos de las variables del problema (variación de la presión máxima en función del tiempo) y la nueva información que puede deducirse (presión máxima del paciente en cada momento). Por ejemplo, solicitándoles que completen la siguiente tabla:



Punto de la gráfica	Información que brinda	Presión (mm de hg)
(0 ; 8)	A las 0 horas de internación la variación de presión fue de 8 mm de mercurio.	$12 + 8 = 20$
(6; 4)		$12 + 4 = 16$
(18; 0)	A las 18 horas de internación la variación de presión fue de 0 mm de mercurio.	
(24 ; -1)		$12 - 1 = 11$
(30 ; -2)		
	A las 36 horas de internación la variación de la presión fue de 0 mm de mercurio.	
		$12 + 2 = 14$

Proponer a los estudiantes el completamiento de una tabla como esta, implica interpretar, organizar y producir cierta información que no se desprende directamente de la lectura del gráfico y que, para volcarla es necesario hacer interpretaciones de información contenida en el mismo.

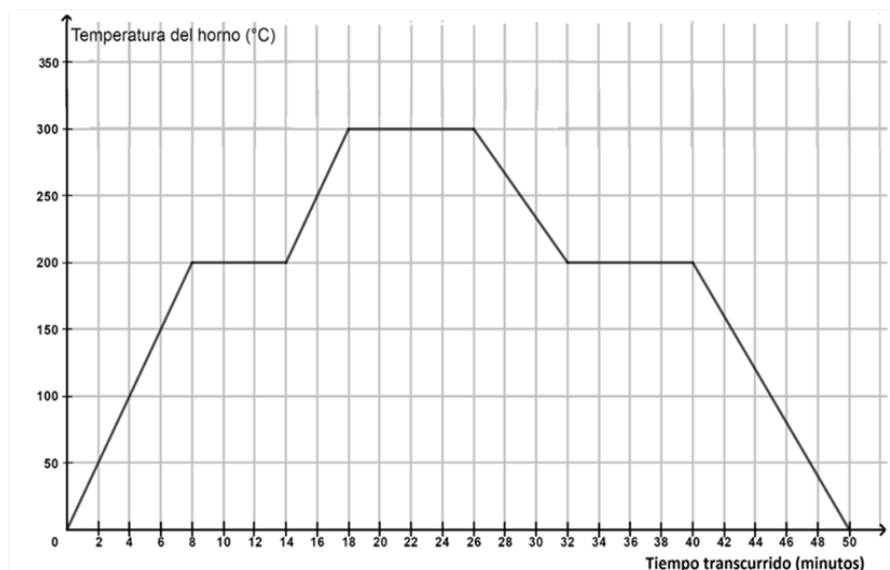
Si bien demanda volver sobre la situación anterior, lo hace desde otro registro de representación (tabla), dando entidad a una representación simbólica, típica en matemática para comunicar información de las variables involucradas en una función, esto es, los pares ordenados.

GRÁFICOS Y COMPORTAMIENTO DE LAS VARIABLES



PROBLEMA 4²: temperatura del horno

Mariela cocinó una torta con la ayuda de su hijo Tomás. Este gráfico muestra la variación de la temperatura del horno desde que lo prendieron hasta que se enfrió totalmente.





- a) ¿Cuál fue la temperatura del horno a los 6 minutos de haberlo prendido? ¿Y a los 8 minutos? ¿Y a los 36 minutos? ¿Y a los 46?
- b) ¿Cuándo la temperatura del horno alcanzó los 100°C ? ¿Y los 200°C ? ¿Cuánto fue la temperatura máxima alcanzada?
- c) La receta decía: “poner la torta en el horno cuando la temperatura sea de 200°C y no sacarla hasta que el horno se enfríe completamente”. ¿Cuánto tiempo esperó Mariela para poner la torta en el horno desde que prendió el horno? ¿Cuántos minutos estuvo la torta en el horno? ¿Cuántos minutos estuvo encendido el horno?
- d) Tomás subió el horno al máximo sin decirle a Mariela. ¿Cuándo sucedió? ¿Cuál fue la temperatura máxima? ¿Cuánto tiempo pasó hasta que Mariela se diera cuenta que subió la temperatura?

ANÁLISIS DIDÁCTICO DEL PROBLEMA

Preguntar para 8, 16, 36 y 46 minutos, implica analizar cómo se lee en el gráfico la temperatura correspondiente, es decir, cómo obtienen a partir del gráfico, cuál es la temperatura a los 8, a los 16, a los 36 y a los 46 minutos.

Sin embargo, preguntar por las temperaturas del horno a los 8 y a los 36 minutos involucra averiguar que dos momentos diferentes tienen la misma temperatura, habilitando luego el análisis de una cuestión del contexto: *¿puede ser que el horno tenga la misma temperatura en dos momentos distintos?* La respuesta en términos del contexto es sí, dado que se pueden presentar distintas situaciones que harían posible que la temperatura se repita en dos momentos diferentes. Por ejemplo, haber llegado a 200°C , aumentar aún más y luego volver a bajar y, al bajar, registrar nuevamente 200°C ; o, puede ser, que la temperatura del horno se haya mantenido durante un tiempo.

Preguntar por la temperatura a los 46 minutos, se realiza con el objetivo de estimar dado que no se corresponde con un valor indicado en el eje de ordenadas. En este caso, es necesario tener en cuenta la escala, para concluir que transcurrido este tiempo la temperatura del horno se encuentra entre 50 y 100°C .

Las preguntas del ítem b), a diferencia de las anteriores (ítem a), consisten en indicar el valor de la variable independiente (tiempo), dado el dato de la variable dependiente (temperatura). Además, para cada valor de temperatura solicitado, le corresponde más de un valor del tiempo. En el caso de 100°C se corresponde con dos valores de tiempo (4 y 45 minutos). Ahora bien, mientras que para 100°C hay sólo dos valores de tiempo, para 200°C y para la temperatura máxima la respuesta son dos intervalos de tiempo. Preguntar para 200°C lleva a reflexionar que no sólo a los 8 y a los 36 minutos tuvo 200°C sino también a los 32 minutos. Para profundizar sobre esta cuestión, se podría plantear a los estudiantes: *tanto a los 8, a los 32 y a los 36 minutos se registró en el gráfico la temperatura del horno era de 200°C ¿en qué otros momentos se registró una temperatura del horno de 200°C ?*

Desde el punto de vista matemático, estas preguntas habilitan el tratamiento del significado de los tramos horizontales de la gráfica: la variable dependiente se mantiene constante al variar la independiente. En términos del contexto se interpretaría, que la temperatura del horno no varió durante ese período de tiempo. Por ejemplo, que desde los 8 minutos hasta los 14 minutos la temperatura del horno fue de 200°C .

A partir de estas dos preguntas, es posible generalizar la *técnica* de cómo leer la información solicitada. Se puede concluir que, dado un valor del tiempo, hay que buscarlo en el eje horizontal (eje de abscisas) donde se



encuentra, para luego desplazarse en forma vertical hasta el punto de la curva correspondiente y, finalmente, desplazarse en dirección horizontal, con el objetivo de identificar el valor correspondiente en el eje de las ordenadas. De manera análoga se debería proceder, para encontrar el valor de la variable independiente (tiempo en este caso), dado el de la dependiente (temperatura).

Los ítems c) y d) traen otras cuestiones a tratar. La elaboración de la respuesta exige una interpretación de la pregunta, que excede la simple lectura directa en el gráfico. Por ejemplo, para responder la pregunta *¿Cuánto tiempo esperó Mariela para poner la torta en el horno desde que prendió el horno?*, hay que recuperar el dato -que indica en la receta- que la torta se pone en el horno cuando la temperatura es de 200 °C. Como este dato no forma parte de la pregunta, se complejiza su interpretación. Por otro lado, para determinar la cantidad de tiempo hay que identificar en el gráfico, el momento inicial de encendido hasta el minuto en que alcanza los 200 °C; sumado a que, justamente para este valor de temperatura, la función se mantiene constante, teniendo distintos valores del tiempo como preimagen de la función, lo que dificulta determinar que la cantidad de tiempo correspondiente, es ocho minutos.

Otro asunto importante a tratar con los estudiantes, son los momentos en que la función decrece, pero visto desde el contexto. Por ejemplo, ante las preguntas *¿Cuántos minutos estuvo la torta en el horno?* *¿Cuántos minutos estuvo encendido el horno?*, hay que componer situaciones diferentes del contexto: qué parte del gráfico indica dónde estuvo encendido el horno (tramos creciente, constante y decreciente de 300 a 200 °C) y cuándo se apagó (tramo final decreciente).





CONSIDERACIONES SOBRE LA GESTIÓN DE LA CLASE

Es importante reconocer que, si bien hay vinculaciones entre una pregunta y otra, en relación a los conocimientos involucrados, las propuestas en esta actividad deben ser planteadas para su resolución una por vez, discutir con los estudiantes sobre sus respuestas y luego establecer conclusiones. Por ejemplo, ante las primeras dos actividades, lo central es que los alumnos expliquen cómo se lee esa información en el gráfico. En líneas generales, pueden decir: hay que mirar en la línea horizontal (eje de las abscisas donde se representa el tiempo) y buscar los 8 minutos, luego identificar en el gráfico un punto y ver en la línea vertical (eje de las ordenadas donde se representa la temperatura) el valor correspondiente a ese punto. Y lo mismo en los otros casos.

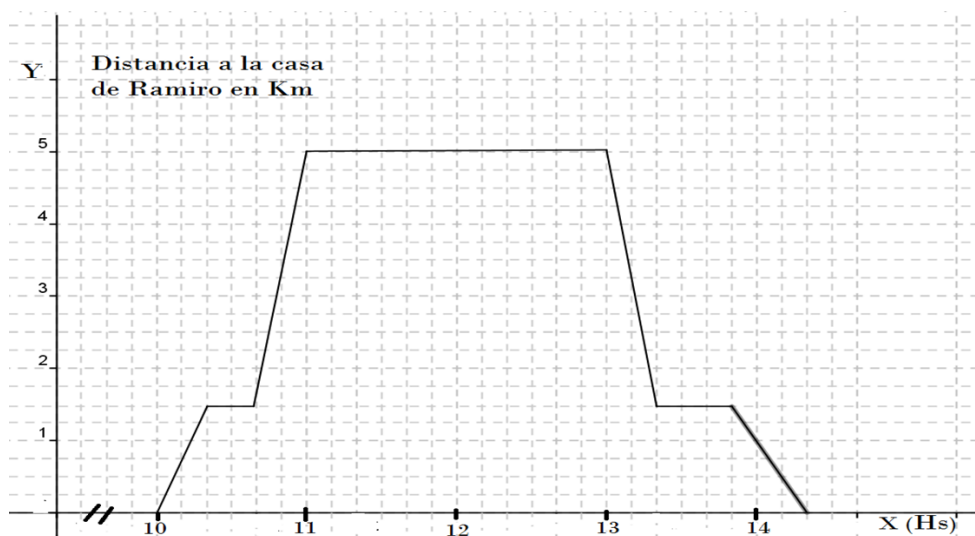
Luego de haber dicho esto para 6, para 8, para 36 y para 46 minutos, el docente puede referirse en términos generales del siguiente modo: *cuando se quiere saber cuál es la temperatura del horno en un determinado momento, lo que hay que hacer es...* Es importante tomar las palabras de los estudiantes para luego introducir nuevo vocabulario. Por ejemplo, decir que la línea horizontal se llama eje de abscisas y representa -en este caso- el tiempo en minutos y que, la línea o recta vertical se conoce como eje de las ordenadas y en este caso en ella se representa la temperatura en grados. Así también, que este gráfico muestra cómo varía la temperatura del horno (en °C) a medida que transcurre el tiempo (en minutos).

PROBLEMA 5³: Entrenamiento en el club

Ramiro juega al fútbol y va al club varias veces por semana a entrenar. Ayer Ramiro pasó a buscar a su amigo Manuel para ir a entrenar al club, luego volvieron a la casa de Manuel, donde almorzaron y después Ramiro volvió a su casa.

La casa de Ramiro, la de Manuel y el club se encuentran sobre la misma calle.

En el gráfico siguiente se representa la distancia a la que Ramiro se encontraba de su casa, en cada momento del día de ayer, desde que salió hasta que regresó a su casa.



³ Adaptación del problema extraído de Itzcovich, Horacio y Otros (2007): Matemática 1. Tinta Fresca.

- a) ¿A qué hora Ramiro pasó a buscar a Manuel?
 - b) ¿Cuánto tiempo estuvieron en el club?
 - c) ¿A qué distancia de la casa de Manuel está el club?
 - d) ¿Se puede saber si Ramiro tardó lo mismo en ir de su casa al club, que del club a su casa?
- ¿Se puede saber a qué hora Ramiro salió de su casa y a qué hora volvió?

■ ■ DIFERENCIAS Y SEMEJANZAS ■ ■ CON EL PROBLEMA 4

Tal como se observa en este gráfico, la forma en que varía la variable dependiente (distancia a la casa de Ramiro) en función del tiempo, es similar a la variación de la temperatura en función del tiempo del Problema 4. Sin embargo, el contexto obliga a problematizar el significado de dos registros de representación diferentes: el croquis de un posible recorrido de alguien, que se desplaza de un lugar a otro y la curva, que representa la variación de la distancia a la casa de Ramiro en función del tiempo. Esto hará aparecer en escena ciertas ideas de los estudiantes en torno a los dos registros involucrados, lo que habilitará precisar

sobre la representación funcional presente en los gráficos cartesianos, a partir de las diferencias con la representación de un recorrido.

El hecho de que la representación de un recorrido, se basa en la copia o réplica del mismo en una cierta escala, es probable que obstaculice la interpretación del gráfico cartesiano. Desde la concepción de aprendizaje que se sostiene no se trata de eludir el obstáculo, sino de enfrentarlo y superarlo. En otras palabras, para que los estudiantes aprendan, es necesario que se enfrenten a este obstáculo y lo superen.

■ SOBRE LAS CONCEPCIONES E IDEAS DE LOS ESTUDIANTES

En este gráfico, cada uno de los puntos representa la distancia a la que se encuentra Ramiro de su casa en cada momento del día, desde que salió de su casa a las 10 hs hasta las 14 hs y 20 minutos en que regresó. Los segmentos horizontales representan, los momentos en que se detuvo por algún motivo; en términos de la lectura del gráfico corresponde a los puntos en los que se mantuvo a la misma distancia de su casa o que no varió la distancia a la que se encontraba de su casa. Es decir, los momentos en los que estuvo en la casa de Manuel o en el club. Los segmentos oblicuos, representan momentos en que se estuvo desplazando, es decir, en los que la distancia a su casa varió en forma creciente - a la ida al club- o en forma decreciente correspondiente a la vuelta del club.

Ahora bien, los estudiantes en situación de aprendizaje, realizan otras interpretaciones interesantes de analizar. Son interesantes los argumentos con los cuales se defienden a la hora de responder las preguntas, que se plantean en este problema. Por ejemplo, sus ideas respecto de los distintos segmentos del gráfico: ¿Qué representan en el problema cada uno de los segmentos horizontales y oblicuos? ¿Qué indica una mayor o menor inclinación? ¿Por qué algunos tienen la misma longitud y otros no?, etc.

En general interpretan, que el gráfico muestra los tiempos que tarda Ramiro para desplazarse de un lugar a otro y los trayectos que va recorriendo, pero sin poner en relación las variables involucradas. Esto les permite responder correctamente algunas preguntas, pero algunos tramos de la gráfica contradicen lo que piensan, tal como veremos a continuación:

- 1) ¿Cómo explican los estudiantes, que el gráfico no es una línea recta siendo que las casas de Ramiro, Manuel y el club se encuentran en la misma calle? Para ellos se trata de un gráfico, donde se representa la ida y la vuelta al club, por este motivo no es una línea recta. Esta hipótesis en cierto modo, es reforzada por el enunciado que dice: "En el gráfico siguiente se representa la distancia a la que Ramiro se encontraba



de su casa, en cada momento del día de ayer, desde que salió hasta que regresó...”

2) Respecto de los segmentos horizontales, y como para los estudiantes los segmentos, en general, son trayectos, argumentan que los horizontales son *lugares*. Por ejemplo, cuando se les pregunta cómo se sabe *-mirando* el gráfico- cuándo estuvo en la casa de Ramiro, señalan correctamente el segmento horizontal (formado por los puntos que tienen como coordenadas el tiempo y la distancia existente entre la casa de Ramiro y Manuel) y argumentan, que es ahí porque *no avanza nada*. No se puede afirmar que están poniendo en relación la distancia con el tiempo, porque puede ser que estén pensando que como es un segmento que no sube, entonces están detenidos, pero esto no es leer información del gráfico utilizando el tiempo y la distancia como datos. Es decir, no señalan que la distancia a la casa de Ramiro, no ha variado al variar el tiempo. Desde el punto de vista de la gestión de la clase, es una buena ocasión para poner en relación la distancia con el tiempo...

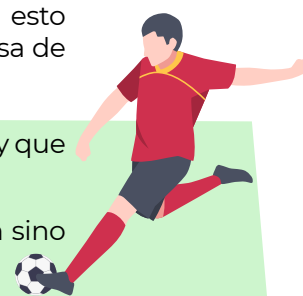
3) Ante la pregunta: ¿Pueden determinar cuánto tiempo caminaron juntos Ramiro y Manuel y cuánto tiempo caminó solo Ramiro a la ida al club? los estudiantes consideran la ida de la casa de Ramiro hasta la casa de Manuel incluyendo el tiempo que permanecen en la casa de Manuel. ¿Por qué consideran este tiempo? Tienen dificultad para entender qué representa el segmento horizontal en este gráfico.

4) ¿Cómo se representa la casa de Manuel en el gráfico? ¿Es un punto? ¿Un segmento? Si es un punto ¿Cuál punto del segmento? ¿Alguno de los dos extremos? ¿El punto medio del segmento? ¿Y Uds. qué contestan? Para los estudiantes, los segmentos de ida desde la casa de Ramiro hasta la casa de Manuel, tiene que ser el mismo que el tiempo que tarda a la vuelta, desde la casa de Manuel hasta su casa y esto debería representarse por medio de un segmento de la misma longitud en ambos casos, pues la distancia es la misma. Nuevamente no ponen en relación ambas variables...

5) Concepción de los estudiantes: La casa de Manuel, está representada por un segmento porque la distancia desde la casa de Ramiro hasta la de Manuel es de 1,5 Km y este segmento corresponde a 1,5 km. Los estudiantes dicen: *“Da lo mismo si fuera acá o acá es lo mismo 1 km y medio (señalando los puntos extremos del segmento) ...entonces todo esto representa la casa (señalando todo el segmento) ¿Representa la casa de Manuel ese segmento?”*

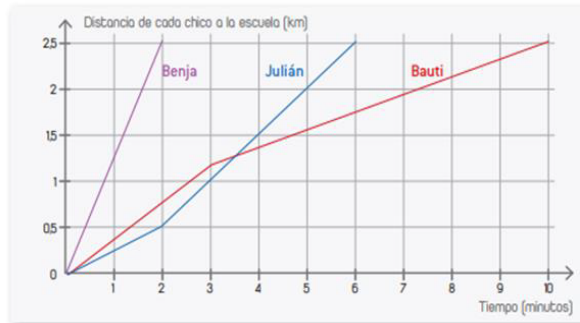
Algunas **conclusiones** a las que se podrían arribar con los estudiantes y que podría formar de las anotaciones en sus carpetas son las siguientes:

- Los gráficos cartesianos no representan un croquis de la situación sino una relación entre dos variables.
- Un punto en el gráfico cartesiano se representa con un par de números llamado par ordenado o coordenadas cartesianas, donde el primer valor indica el valor correspondiente al eje de las abscisas y el segundo al de las ordenadas. Por ejemplo, en la actividad el par (10:50; 3,25) indica que a las 10:50hs Ramiro estuvo a 3,25km de su casa.
- En este gráfico la distancia a la que se encuentra Ramiro, varía a medida que transcurre el tiempo. La variación se representa con una poligonal formada por segmentos que tienen distinta inclinación. Los segmentos oblicuos, indican que la variación es creciente o decreciente. La variación creciente, significa que Ramiro se fue alejando de la casa y, si es decreciente, significa que se fue acercando a su casa. Los segmentos horizontales indican, que una de las variables se mantuvo constante. Para distintos valores del tiempo representado en el eje de las abscisas, el valor de la ordenada no varía, por ejemplo, cuando Ramiro estuvo en el club de 10:50 a 13 hs. Al estar en un mismo lugar, la distancia no varió en ese período de tiempo.

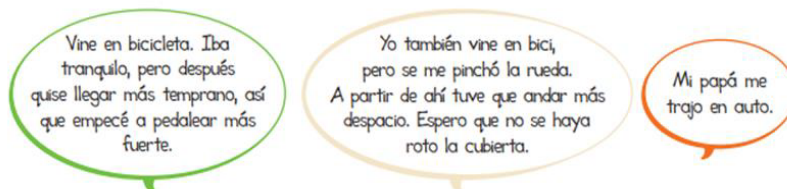


PROBLEMA 6⁴: De la escuela al club

Benja, Julián y Bauti, son compañeros de escuela y siempre, después de la escuela, van por separado a jugar al fútbol al mismo club. Los gráficos representan la distancia de cada chico a la escuela en función del tiempo transcurrido desde su salida.

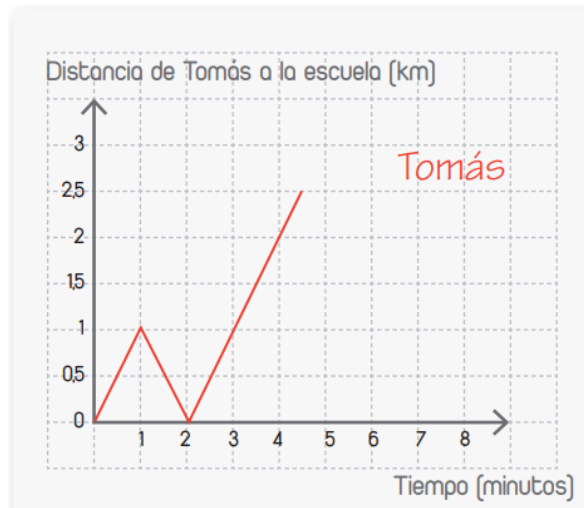


El entrenador les preguntó cómo llegaron al club. Los chicos respondieron así:



Resolver las consignas en parejas.

- Analizando los gráficos decidan de quién es cada respuesta. Explicar cómo se dieron cuenta.
- Tomás, un compañero de los chicos, también fue a jugar ese día al mismo club y el entrenador le hizo la misma pregunta. Escriban una posible respuesta de Tomás considerando la información que brinda este gráfico.



En este caso, al ser la gráfica de tres funciones correspondientes a la distancia de cada chico a la escuela en función del tiempo transcurrido desde que salieron de sus escuelas al club, habilita la discusión sobre la interpretación de cada función, en términos de los cambios de velocidad de cada chico y la comparación de las tres en términos de las velocidades de los movimientos realizados por cada uno.

Por ejemplo, el estudiante que pinchó su bicicleta en el camino y a partir de allí tuvo que andar más despacio, por lo que no pudo haber sido Benja ni Julián, ya que la variación de la distancia de Benja a la escuela, es la misma por cada minuto transcurrido y la distancia de Julián a la escuela se incrementa a partir de los 2 minutos de haber salido de la escuela.



3

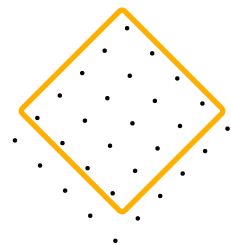
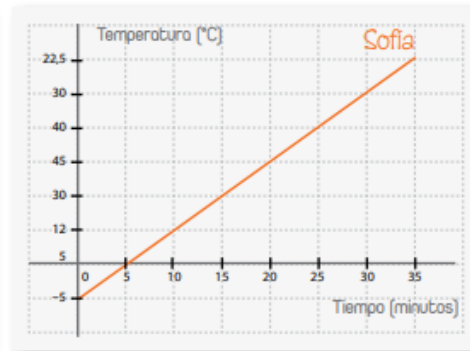
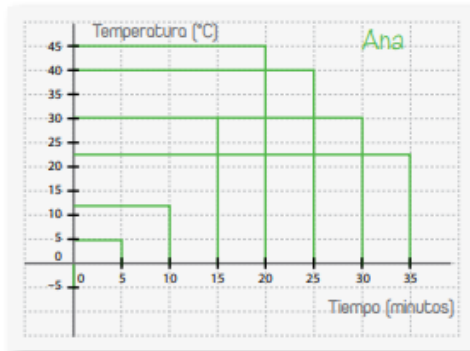
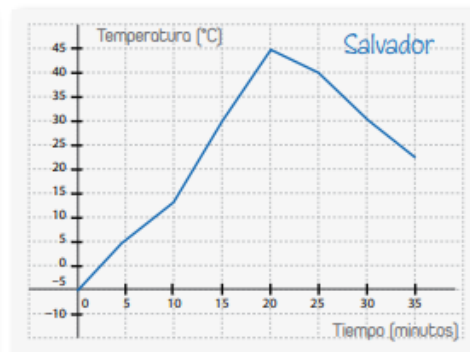
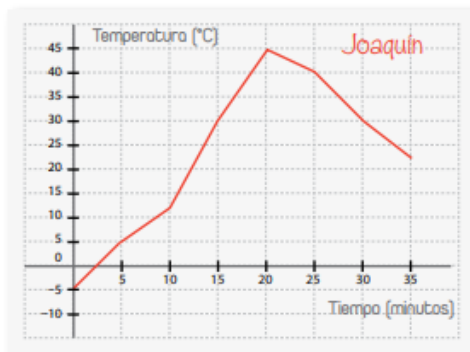
GRÁFICOS Y TABLAS DE VALORES

PROBLEMA 7⁵

La profesora de Biología midió, cada 5 minutos, la temperatura de una sustancia durante el proceso químico y armó esta tabla.

Tiempo (en minutos)	0	5	10	15	20	25	30	35
Temperatura (en °C)	-5	5	12	30	45	40	30	22,5

- ¿Cuál era la temperatura de la sustancia cuando empezó a medir?
- ¿En algún momento la temperatura de la sustancia fue de 0°C?
- ¿Cuál es la máxima temperatura que midió y en qué momento realizó esa medición?
- ¿Se puede afirmar que la temperatura de la sustancia comenzó a disminuir (decrecer) a los 25 minutos de iniciar el proceso químico?
- ¿En qué intervalo de 5 minutos la temperatura creció más?
- Cuatro alumnos hicieron estos gráficos usando los datos de la tabla anterior. ¿En todos los gráficos se puede leer la información obtenida de la tabla?



⁵ Extraído de Sessa, Carmen y Otros (2016): Hacer Matemática 2 /3. Editorial Estrada.

g) Lucía hizo este gráfico, usando la información de la tabla:

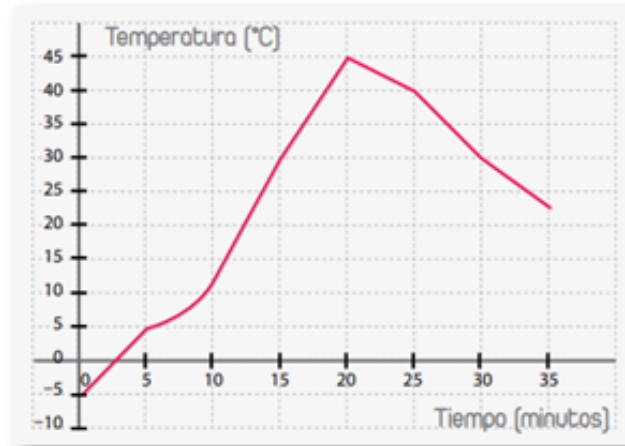


GRÁFICO DE LUCÍA

Lucía y Joaquín unieron los puntos entre los 5 y los 10 minutos de distinto modo. ¿A qué se puede deber esta diferencia entre los dos gráficos?

ALCANCES DE LA INFORMACIÓN BRINDADA POR TABLA DE VALORES

Tal como se expresa en este documento, en general, las propuestas de trabajo con funciones que más circulan en la educación secundaria, se basan en completar tablas de valores a partir de fórmulas dadas y posteriormente representar esos pares de valores en gráficos cartesianos. La tarea de los estudiantes entonces, se reduce a asignar valores a la variable independiente - si el docente no se los da -, luego hacer cálculos sin equivocarse para obtener valores de la variable dependiente, posteriormente marcar en el gráfico cartesiano los puntos obtenidos y finalmente unirlos según algún criterio.

Si bien deben poder realizar el proceso descrito, el hacerlo mecánicamente sin reflexionar sobre diferentes implícitos que tiene esta tarea, deja a cargo de los mismos la interpretación de muchas cuestiones que no tienen por qué resolverse de manera satisfactoria.

En el caso de este problema, se tiene una tabla de valores y, si bien no se tiene una fórmula, se tiene un contexto donde se construyó esta tabla.

Si sólo se tienen en cuenta los valores de la tabla, a la pregunta: ¿En algún momento la temperatura de la sustancia fue de 0°C ?, se podría contestar que la temperatura de la sustancia nunca fue de 0°C ya que dicho valor no aparece en la misma. Sin embargo, dicha tabla fue armada en el contexto de un proceso químico, donde la temperatura en función del tiempo tiene un comportamiento continuo y, para pasar de -5 a 5 en las primeras 5 horas, en algún momento tuvo que haber tomado el valor de 0°C . Si bien no se tiene

una fórmula que defina la función, se pueden realizar más afirmaciones que si se tuviera únicamente una tabla sin un contexto determinado.

Las preguntas c) y d) están muy relacionadas y apuntan a reflexionar sobre las limitaciones que tiene la información brindada por una tabla, aunque ésta haya sido armada en un contexto determinado. El máximo valor registrado en la tabla (45°C) no tiene por qué coincidir con el valor máximo alcanzado por la temperatura. Es posible que entre los 15 y los 20 minutos la temperatura haya alcanzado un valor mayor y, a los 20 minutos la temperatura ya se encuentre en descenso. También es posible que a los 20 minutos la temperatura continúe creciendo y recién comience a descender entre los 20 y 25 minutos. La temperatura en función del tiempo, es un fenómeno continuo y la tabla sólo proporciona algunos valores y, aunque al responder la pregunta b) se dijo que en algún momento la temperatura fue de 0°C , no se puede saber exactamente en qué momento sucedió esto. Tampoco es posible saber cuándo la función alcanzó el máximo y cuál fue dicho valor.

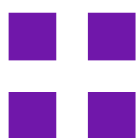
En los cuatro gráficos del ítem f) se encuentra la información brindada por la tabla de valores y sin embargo tienen sus diferencias: El de Joaquín es un gráfico, que podríamos llamar estándar; la curva del gráfico de Salvador tiene la misma forma que la del gráfico de Joaquín, pero los ejes se cortan en el primer par de valores que muestra la tabla; el gráfico de Ana indica los puntos sin unirlos con una curva y, por último, el de Sofía es una recta.



El gráfico elaborado por Salvador, permite discutir que los ejes coordenados se cortan en el punto donde toman el valor cero, permitiendo con una percepción global identificar el lugar donde las dos variables se anulan, llamando a este punto, origen de coordenadas. El gráfico de Ana resalta con segmentos verdes las coordenadas correspondientes a cada punto, dificultando de esta manera la visualización de la variación de la función. El gráfico de Sofía ubica en el eje de las ordenadas los valores que aparecen en la

tabla sin respetar el orden y la escala, provocando que la gráfica sea una recta y no represente la variación de la función, es decir que, puede suceder que la gráfica sea creciente cuando en realidad no lo es, que la variación parezca uniforme, etc.

Comparar el gráfico de Joaquín con el de Lucía, permite profundizar el análisis sobre la no exhaustividad de la información que brinda la tabla de valores, ya que, es posible obtener distintas gráficas según el valor que se asigne a los valores que no se muestran en la tabla.



REFLEXIONES FINALES



A la hora de la enseñanza, es necesario tomar conciencia sobre la importancia que reviste que los estudiantes comprendan el significado de los objetos matemáticos, los problemas que resuelven etc. y lo distingan de lo que son sus representaciones. Al respecto, el trabajo de investigación de Ruiz Higuera (1993) muestra, precisamente, las dificultades de los alumnos para atrapar el concepto de función, debido a determinadas prácticas en las aulas. Al convertirse la noción de función, en un objeto de estudio en sí mismo únicamente, relegando la resolución de problemas que ligaban las nociones de variabilidad, cambio y dependencia entre variables, los estudiantes toman contacto con un objeto desprovisto de significado. Dice R. Higuera (1993): *"...la reducción algorítmica de las nociones matemáticas contribuye al desvanecimiento del problema como motor de generación de conocimientos en los alumnos y en consecuencia a una pérdida del sentido epistemológico de estas nociones..."* *"...Los fenómenos sujetos al cambio y las relaciones de causa-efecto entre magnitudes variables que fueron el germen de la noción de función, se encuentran ausentes de nuestras aulas; en consecuencia, para nuestros alumnos es mucho más fuerte la presencia de "incógnitas" e "indeterminadas" que la de "variables"*.

Así también, el estudio de funciones en la educación secundaria, se fundamenta en el aporte que este realiza a la formación de ciudadanos críticos, favoreciendo el desarrollo de capacidades para organizar, sistematizar, comunicar e interpretar información en la sociedad actual. Es en este sentido que se orientó la propuesta de trabajo, presentada alrededor de dos representaciones: gráficos cartesianos y tablas. Se trata de modelos en la matemática y que, tal como lo expresa Sadovsky (2005), la noción de modelización ofrece la posibilidad de pensar el trabajo matemático de manera más integrada, y que, a su vez este proceso supone reconocer una problemática, elegir una teoría para "tratarla" y producir conocimiento nuevo. Si bien los estudiantes, no tienen que producir un modelo, la interacción con los gráficos y tablas les permite un primer acercamiento con sentido a estos objetos.

BIBLIOGRAFÍA



1
2
3

- Adam, R; Bella, A; Diaz, A (1994): El lenguaje de las gráficas. Ediciones Prociencia.
- Hanfling, M. (2000): Estudio didáctico de la noción de función. En Chemello, G. (coord) Estrategias de Enseñanza de la Matemática. Universidad Nacional de Quilmes.
- Itzcovich, H. (2007): Matemática 1. Editorial Tinta Fresca.
- Ruiz Higuera, L. (1993): Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico. Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Sadovsky, P. (2005): *Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. 1ra ed. Buenos Aires, Libros del Zorzal.
- Sessa, C. y Otros (2015): Hacer Matemática 1/2. Editorial Estrada.
- Sessa, C. y Otros (2016): Hacer Matemática 2/3. Editorial Estrada.





CORRIENTES

somos todos!

Ministerio de Educación

Dirección de Planeamiento e Investigación Educativa

DR. GUSTAVO VALDÉS

GOBERNADOR DE CORRIENTES

LIC. PRÁXEDES YTATÍ LÓPEZ

MINISTRA DE EDUCACIÓN

